

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет

В.А. Огородников

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ-1

Учебное пособие

Новосибирск, 2011

УДК 519.676+519.6+551.5

Огородников В.А. Моделирование случайных процессов-1.

Настоящая учебное пособие разработано в рамках программы развития НИУ НГУ. В нем рассматриваются алгоритмы численного моделирования гауссовских и негауссовских процессов и полей дискретного аргумента, основанные на использовании метода условных распределений и метода нелинейных преобразований гауссовских процессов и полей. Приведены примеры использования алгоритмов для построения стохастических моделей реальных процессов.

Оглавление

Предисловие	5
1 Метод условных распределений	10
1.1 Гауссовские процессы с корреляционными матрицами теплицева вида	10
1.2 Метод условных распределений для моделирования нормальных векторов с заданной ковариационной матрицей	16
1.3 Моделирование гауссовских векторов с корреляцион- ными матрицами теплицева вида	23
1.4 Вопросы регуляризации алгоритма, контроль точно- сти вычислений	27
1.5 Моделирование процессов авторегрессии с заданной корреляционной структурой	33
2 Численные модели стационарных векторных гауссов- ских последовательностей и однородных полей	45
2.1 Метод условных распределений для моделирования векторных гауссовских последовательностей ограни- ченной длины с блочно-теплицевыми ковариационны- ми матрицами	46
2.1.1 Некоторые приемы регуляризация алгоритма	56

2.2	Алгоритмы моделирования однородных и однородных изотропных гауссовских полей на регулярных сетках с блочно-тёплицевыми ковариационными матрицами	60
2.3	Моделирование стационарных гауссовских векторных авторегрессионных процессов	63
2.4	Использование алгоритмов моделирования стационарных векторных процессов для моделирования периодически коррелированных процессов дискретного аргумента	67
3	Специальные алгоритмы моделирования негауссовских процессов и полей	71
3.1	Алгоритмы моделирования негауссовских процессов дискретного аргумента с приложениями в области статистической метеорологии	72
3.1.1	Методы численного моделирования бинарных последовательностей	73
3.1.2	Марковские стохастические модели бинарных временных рядов	74
3.1.3	Распределение длительностей серий из одинаковых состояний (верификация численных моделей)	78
3.2	Моделирование комплексов негауссовских процессов и полей. Примеры построения вероятностных моделей реальных процессов	84
3.2.1	Численные стохастические модели совместных временных рядов с одномерными распределениями в виде смеси двух нормальных распределений	86
3.2.2	Модели совместных гидрометеорологических временных рядов с распределениями в виде смесей двух нормальных распределений и дискретными распределениями	93

3.3	Моделирование условно распределенных гауссовских процессов и полей дискретного аргумента. Стохастическое восполнение гауссовских стационарных процессов и однородных полей	96
3.3.1	Рекурсивные алгоритмы моделирования реализаций условно распределенных стационарных процессов.	97
3.3.2	Моделирование условных полей метеоэлементов для задач динамико-вероятностного моделирования атмосферных процессов	104
3.4	Некоторые классы кусочно-постоянных негауссовских случайных процессов и полей. Примеры использования	113
3.4.1	Численные стохастические модели негауссовских процессов на потоках Пальма	113
3.5	Кусочно-постоянное стохастическое восполнение негауссовских случайных процессов и полей с сохранением их исходных свойств	117
3.5.1	Восполнение однородного поля с узлов регулярной сетки в произвольную точку области .	126
3.5.2	Восполнение однородного и изотропного поля	133
	Литература	150

Предисловие

В связи с интенсивным развитием вычислительных средств появляется возможность решать более сложные и трудоемкие научные и прикладные задачи в различных областях науки и техники с привлечением методов статистического моделирования. При решении современных задач, связанных с моделированием и анализом атмосферных процессов и климата, океанологических и гидрологических процессов, процессов переноса примесей в атмосфере, при решении различного типа природоохранных задач, задач по исследованию закономерностей переноса излучения в атмосфере, в задачах статистической турбулентности, при объединении гидротермодинамических и вероятностных подходов к описанию реальных процессов, при исследовании климатических воздействий атмосферных процессов на различные строительные объекты и сооружения, при решении агрофизических задач и т.д. используются многомерные стохастические модели атмосферных процессов. Эти задачи определяют новые требования к численным вероятностным моделям - увеличение размерности, привлечение большого объема фактической информации, учет в моделях большого числа статистических параметров. При этом для решения перечисленных выше задач необходимы также реалистичные стохастические модели атмосферных процессов, в достаточной степени адекватно описывающие характерные особенности реальных данных. В первую очередь в них должны быть учтены доступные (в рамках имеющейся информации) особенности распределений и корреляционных связей многомерного процесса. С

другой стороны, при использовании вероятностного подхода к решению этих задач необходимо моделировать очень большое число реализаций процессов и полей для получения надежных оценок рассчитываемых функционалов. В связи с этим разработана универсальная и экономичная методика и алгоритмы моделирования многомерных случайных процессов и полей с заданной корреляционной структурой (в том числе с учетом нестационарности или неоднородности), а также алгоритмы стохастического восполнения, используемых при построении стохастических моделей атмосферных процессов, является важной теоретической и практической задачей.

Основными характеристиками, используемыми при построении численных алгоритмов моделирования случайных процессов и полей, являются одномерные распределения, корреляционные функции либо спектральные плотности соответствующих процессов и полей. Для учета одномерных распределений используются различные подходы, например функциональные нелинейные преобразования гауссовских процессов и полей, моделирование кусочно-постоянных процессов и полей с использованием различных типов точечных потоков, линейные преобразования негауссовских процессов.

Чаще всего в основе методов моделирования негауссовских процессов и полей лежат методы моделирования гауссовских процессов и полей. Моделирование гауссовских процессов и полей играет фундаментальную роль при построении негауссовских моделей по той причине, что класс возможных корреляций для гауссовского процесса наиболее широк (он определяется условием неотрицательной определенности соответствующей корреляционной функции или матрицы), поэтому функциональные преобразования гауссовского процесса позволяют описывать достаточно широкий класс корреляционных функций негауссовского процесса. В основе моделирования гауссовских векторов и процессов с дискретным аргументом лежат различного типа линейные преобразования, модели авторегрессии, скользящего среднего, смешанные модели авторегрессии-скользящего среднего. Связующим звеном большинства методов мо-

делирования гауссовских процессов с дискретным аргументом, основанных на линейных преобразованиях, является метод условных распределений. Специфика и основное преимущество этого метода состоит в том, что для класса тёплицевых и блочно-тёплицевых ковариационных матриц, которые соответствуют стационарным процессам и однородным полям, он, в отличие от других, позволяет строить рекурсивные алгоритмы моделирования и тем самым принципиально увеличивать число используемых параметров и размерность решаемых задач. При этом класс гауссовских процессов, определяемых тёплицевыми и блочно-тёплицевыми ковариационными матрицами достаточно широк и имеет большую область приложений.

Вопросам построения и исследования алгоритмов для построения вероятностных моделей гидрометеорологических процессов и полей на основе метода условных математических ожиданий посвящены первые две главы данного пособия.

В третьей главе рассматриваются некоторые вопросы моделирования негауссовских случайных процессов и полей. Приведены примеры статистического моделирования гидрометеорологических процессов с учетом специфики одномерных распределений. Для стационарных гауссовских последовательностей на основе метода “условных распределений” построены рекурсивные алгоритмы моделирования “условных реализаций” процессов и полей при заданных значениях в фиксированных точках. Рассмотрены также алгоритмы моделирования кусочно-постоянных негауссовских процессов и полей, специфика которых состоит в объединении моделей случайных процессов и полей с дискретным аргументом на стационарных точечных потоках. Рассмотренные алгоритмы непосредственно связаны с алгоритмами стохастического восполнения случайных процессов и полей, заданных в узлах регулярной (либо нерегулярной) сетки в произвольную точку области. Рассмотрены механизмы восполнения, сохраняющие свойства исходных процессов и полей с дискретным аргументом: одномерные распределения, для процессов -

стационарность, для полей - однородность, (либо однородность и изотропность).

Учебное пособие предназначено для студентов и магистрантов ММФ НГУ и соответствует курсу “Моделирование случайных процессов -1” магистерской основной образовательной программы по направлению “Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло”.

Глава 1

Метод условных распределений

1.1 Гауссовские процессы с корреляционными матрицами теплицева вида

Первые две главы посвящены вопросам численного моделирования скалярных и векторных гауссовских случайных последовательностей и полей дискретного аргумента с корреляционными матрицами, относящихся к классу теплицевых. Соответствующие алгоритмы основаны на методе условных распределений, которые были предложены в работе [20], и обобщены на многомерный случай в работе [28]. Эти алгоритмы основаны на модификации общего метода моделирования негауссовских векторов с заданной многомерной плотностью распределения (в литературе [15, 25, 40] известный как метод условных распределений) на случай моделирования нормальных векторов с заданной ковариационной матрицей. Основное преимущество этого метода перед другими линейными методами, состоит в том, что из всех методов моделирования гауссовских векторов с корреляци-

онными матрицами R_n теплицева типа, основанных на линейных преобразованиях вида

$$\vec{\xi}_n = A_n \vec{\varphi}_n,$$

где $\vec{\xi}_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$, а $\vec{\varphi}_n = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ - независимые нормальные величины с нулевым средним и единичной дисперсией, а A_n - некоторая квадратная матрица такая, что $A_n A_n^T = R_n$, по-видимому, только этот метод позволяет строить рекурсивные алгоритмы для вычисления элементов матрицы A_n и, соответственно, существенно увеличивать размерность решаемых задач.

Класс процессов и полей, корреляционная структура которых описывается различного типа теплицевыми матрицами, достаточно широк.

Если стационарный в широком смысле случайный процесс $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$ определен на любом конечном множестве t_i , $i = 1, \dots, n$ значений параметра t , причем $t_{i+1} - t_i = \Delta t = const$, то корреляционная матрица R_n векторной случайной величины

$$(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))^T = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T = \vec{\xi}_n,$$

имеет вид

$$R_n = \begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{n-1} \\ r_1 & 1 & r_1 & \cdots & r_{n-2} \\ r_2 & r_1 & 1 & \cdots & r_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n-1} & r_{n-2} & r_{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

т.е. является теплицевой. Аналогично, если множество t_i значений параметра t - бесконечное счетное множество ($i = \dots - 1, 0, 1, \dots$) и $\Delta t = const$, то векторные случайные величины $\vec{\xi}_{n'}$, соответствующие любому конечному подмножеству $t_{i'}$ $i' = 1, \dots, n'$ имеют корреляционные матрицы R_n вида (1.1).

Одним из важных классов случайных процессов

$$\dots \xi(t_{-1}), \xi(t_0), \xi(t_1), \dots = \dots \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots,$$

являются процессы авторегрессии, процессы скользящего среднего, а также смешанные процессы авторегрессии-скользящего среднего [2, 4], для которых матрицы типа (1.1) для любого конечного подмножества t_i являются теплицевыми и имеют специфику, характерную для каждой из этих моделей, например, для процесса скользящего среднего эти матрицы - ленточные.

Пусть теперь $\vec{\xi}(t)$, $-\infty < t < \infty$ - стационарный в широком смысле многомерный процесс [5], где $\vec{\xi}(t)$ при любом фиксированном $t = t_i$ представляет собой вектор вида

$$\vec{\xi}(t_i) = (\xi_1(t_i), \dots, \xi_p(t_i))^T = \vec{\xi}_i,$$

Если этот процесс определен на любом конечном множестве t_i , $i = 1, \dots, n$ значений параметра t , $\Delta t = \text{const}$, то ковариационная матрица $R_{(n)}$ многомерной векторной случайной величины ξ_i имеет блочно-теплицев вид [6, 18]

$$R_n = \begin{pmatrix} R_0 & R_1 & R_2 & \cdots & R_{n-1} \\ R_1^T & R_0 & R_1 & \cdots & R_{n-2} \\ R_2^T & R_1^T & R_0 & \cdots & R_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n-1}^T & R_{n-2}^T & R_{n-3}^T & \cdots & R_0 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

где R_k , $k = 0, \dots, n - 1$ - матрицы $p \times p$. Вещественная положительно определенная матрица $R_{(n)}$ - симметрична, но ее блочные элементы могут быть как симметричными, так и несимметричными. Если $M\vec{\xi}_{(n)} = \vec{0}$, то ковариации $M\xi_i(t_l)\xi_j(t_l + k\Delta t) = r_{ij}(k)$, $M\xi_j(t_l)\xi_i(t_l + k\Delta t) = r_{ji}(k)$, являются элементами матриц R_k , причем в общем случае $r_{ij}(k) \neq r_{ji}(k)$.

Компоненты вектора $\vec{\xi}(t)$ могут быть интерпретированы как случайные процессы различной физической природы, векторы $\vec{\xi}(t_1), \dots, \vec{\xi}(t_n)$, как соответствующие временные ряды на конечном множестве равноотстоящих моментов времени, а последовательности элементов матрицы $R_{(n)}$, одинаково расположенные в блоках R_k , $k = 0, \dots, n - 1$ как набор авто- и взаимных ковариационных

функций для временных сдвигов $k\Delta t$. При решении практических задач, например, при моделировании совместных временных рядов различных метеоэлементов матрицы R_k чаще всего несимметричны (лишь в некоторых редких случаях приближенно допускают их симметричность).

Вектор $\vec{\xi}(t)$ при любом t может быть интерпретирован как процесс скорости течения или ветра, а последовательность блоков R_k матрицы (1.2) для векторов $\vec{\xi}(t_1), \dots, \vec{\xi}(t_n)$ как сечения ковариационного тензора

$$K_{\vec{\xi}}(t_i, t_j) = M\vec{\xi}(t_i) \times \vec{\xi}(t_j) = K_{\vec{\xi}}(k\Delta t),$$

где \times обозначает тензорное произведение векторов, а $k\Delta t = t_j - t_i$, $i, j = 1, \dots, n$. Сами элементы ковариационного тензора зависят от выбора системы координат евклидова вектора $\vec{\xi}(t)$, но при этом существует определенный набор функций от элементов ковариационного тензора (или инвариантов), которые не зависят от выбора системы координат. Таким образом блочно-теплицева матрица (1.2) как функция системы координат евклидова вектора $\vec{\xi}(t)$ при фиксированных $t = t_i$, $i = 1, \dots, n$ является неотрицательно определенной тензорной функцией дискретных аргументов t_i и t_j .

Следующим классом стационарных случайных процессов ковариационная структура которых описывается матрицами вида (1.2) являются пространственно-временные поля на регулярной и нерегулярной пространственной сетке. Временная сетка как и во всех предыдущих случаях остается регулярной ($\Delta t = const$). Пусть $\xi(\vec{x}, t) = \xi(x, y, z, t)$ - стационарный по времени случайный процесс, зависящий от пространственных координат. На конечном множестве параметров x_l, y_l, z_l , $l = 1, \dots, p$ при фиксированном $t = t_i$ значения процесса $\vec{\xi}(x, t)$ представляет собой вектор вида $\vec{\xi}_p(t_i) = (\xi(\vec{x}_1, t_i), \dots, \xi(\vec{x}_p, t_i))^T$ с ковариационной матрицей $M\vec{\xi}_p(t_i)\vec{\xi}_p(t_i) = R_0$. Вектор $\vec{\xi}_p(t_i)$ интерпретируется как случайное пространственное поле на сетке с координатами узлов \vec{x}_l , $l = 1, \dots, p$.

На конечном множестве значений t_i , $i = 1, \dots, n$ параметра t ,

$\Delta t = \text{const}$ многомерная векторная случайная величина

$$\vec{\xi}(t_i) == (\xi_p^T(t_1), \dots, \xi_p^T(t_n))^T = (\xi_1^T, \dots, \xi_n^T)^T = \vec{\xi}_{(n)},$$

интерпретируется как стационарное по времени пространственно-временное поле с ковариационной матрицей $R_{(n)}$ вида (1.2).

Класс пространственных полей, которые могут быть построены на основе рассматриваемых в работе подходов, определяется структурой вектора $\vec{\xi}_p(t_i)$ и структурой с ковариационной матрицы R_0 . Если пространственная сетка $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$ нерегулярна, то при фиксированном t_i поле представляет собой вектор $\vec{\xi}_p(t_i) = (\xi(\vec{x}_1, t_i), \dots, \xi(\vec{x}_p, t_i))^T$ с ковариационной матрицей R_0 , вообще говоря, произвольного вида. Если пространственная сетка регулярна, то компоненты вектора $\vec{\xi}_p(t_i)$ могут быть объединены в определенную систему подвекторов, а матрица R_0 становится блочной. В случае однородного поля ее блоки являются несимметричными теплицевыми матрицами, а если поле однородно изотропное, то эти блоки еще и симметричны. Поэтому ковариационная матрица $R_{(n)}$ пространственно-временного поля, в котором при любом фиксированном t_i пространственное поле однородно, является блочно-теплицевой и, при этом, ее блоки также теплицевы.

Пространственно-временное векторное гауссовское поле $\vec{\xi}(\vec{x}, t)$, где при любых фиксированных \vec{x}, t вектор $\vec{\xi}(\vec{x}, t)$ является евклидовым случайным вектором, в узлах сетки \vec{x}_l, t_i строится аналогично, но при этом блоки R_k матрицы $R_{(n)}$ в свою очередь разбиваются на подблоки, причем элементы этих подблоков являются проекциями евклидова вектора в выбранной системе координат. Как и в случае рассмотренной выше последовательности евклидовых векторов, матрица (1.2) как функция системы координат евклидова вектора $\vec{\xi}(\vec{x}, t)$ при фиксированных $\vec{x}_l, t = t_i, l = 1, \dots, p, i = 1, \dots, n$ является неотрицательно определенной тензорной функцией дискретных аргументов $\vec{x}_l, \vec{x}_q, t_i, t_j$. В приложении к гидрометеорологическим и океанологическим задачам эти модели могут быть использованы для моделирования пространственных и пространственно-

временных полей векторной скорости ветра и течений.

Следует отметить, что метод "условных распределений лежащий в основе моделирования рассмотренных классов процессов и полей с дискретным аргументом, ориентирован на непосредственное использование ковариационных матриц моделируемых процессов. Соответствующие матрицы могут быть получены путем обработки реальной гидрометеорологической информации, с учетом специфики используемой модели.

В заключение рассмотрим еще один класс процессов, ковариационная структура которых описываются матрицами типа (1.2). Это класс периодически нестационарных в широком смысле процессов или, как их обычно называют [13], периодически коррелированных случайных процессов (ПКСП). Пусть $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$ - периодически коррелированный случайный процесс, для которого среднее, дисперсия и корреляционная функция являются периодически функциями

$$\begin{aligned} M\xi(t+T) &= M\xi(t), \\ D\xi(t+T) &= D\xi(t), \\ K(t+T, \tau) &= K(t, \tau), \end{aligned}$$

где $K(t, \tau) = M(\xi(t) - M\xi(t))(\xi(t+\tau) - M\xi(t+\tau))$. Если $\xi(t)$ определен на конечном множестве t_i $i = 1, \dots, m$ значений параметра t , $\Delta t = const$, где $m = n \times p$, $p\Delta t = T$, то ковариационная матрица $R_{(n)}$ векторной случайной величины

$$\begin{aligned} &(\xi(t_1), \dots, \xi(t_m))^T = \\ &= (\xi(t_1), \dots, \xi(t_p), \dots, \xi(t_{m-p+1}), \dots, \xi(t_m))^T = , \\ &= (\vec{\xi}_1^T, \dots, \vec{\xi}_n^T)^T = \vec{\xi}_{(m)} \end{aligned}$$

имеет вид (1.2), в которой элементы блоков R_k , $k = 0, \dots, n-1$, в отличие от всех предыдущих случаев, зависят от временной переменной t_i . Ковариационная структура многомерных и векторных периодически коррелированных процессов с дискретным аргументом может быть описана с матрицами типа (1.2) по аналогии с рассмотренными выше случаями.

Рассмотренные случаи не исчерпывают весь класс процессов и полей, для построения которых может быть использован аппарат теплицевых матриц. Например, общая ковариационная матрица процесса может не обладать свойством блочной теплицевости, но каждый ее блок быть теплицевой матрицей. Как и в скалярном случае, для повышения размерности решаемых задач метод "условных распределений" может быть совмещен с многомерными моделями авторегрессии, скользящего среднего и смешанными моделями авторегрессии-скользящего среднего.

1.2 Метод условных распределений для моделирования нормальных векторов с заданной ковариационной матрицей

В общем случае n -мерный гауссовский вектор $\vec{\xi}_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ с нулевым средним и произвольной корреляционной матрицей $R_n = (r_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$

$$R_n = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{12} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{1n} & r_{2n} & \cdots & r_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

может быть получен с помощью линейного преобразования

$$\vec{\xi}_n = A_n \vec{\varphi}_n, \quad (1.4)$$

где $\vec{\varphi}_n = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ - гауссовский вектор с нулевым средним и единичной корреляционной матрицей (набор независимых гауссовских величин с нулевым средним и единичной дисперсией), а A_n - нижняя треугольная матрица такая, что $A_n A_n^T = R_n$. Матрица A_n

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

вычисляется по рекуррентным формулам (см. [15,25,43])

$$\begin{aligned} a_{11} &= r_{11}^{1/2}, & a_{i1} &= r_{i1}/a_{11}, \\ a_{ij} &= \frac{r_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik}a_{jk}}{a_{ii}}, & & \\ i &= 2, \dots, n, & j &= 2, \dots, i \end{aligned} \quad (1.6)$$

На практике этот метод используется обычно для моделирования гауссовских векторов сравнительно невысокой размерности с учетом возможностей современных компьютеров, поскольку для вычисления каждого очередного столбца матрицы A_n требуется хранить в памяти компьютера все предшествующие столбцы. (Всего требуется хранить в памяти $n(n+1)/2$ элементов матрицы A_n и столько же для матрицы R_n).

Другой подход к решению этой задачи следует из общего метода моделирования случайного вектора

$$\begin{aligned} \vec{\xi}_n &= (\xi_1, \dots, \xi_n)^T = (\vec{\xi}_q^T, \vec{\xi}_{n-q}^T)^T, \\ \vec{\xi}_q &= (\xi_1, \dots, \xi_q)^T, & \vec{\xi}_{n-q} &= (\xi_{q+1}, \dots, \xi_n)^T \end{aligned}$$

с плотностью

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_q, \vec{x}_{n-q})^T, \\ \vec{x}_q &= (x_1, \dots, x_q)^T, & \vec{x}_{n-q} &= (x_{q+1}, \dots, x_n)^T, \end{aligned}$$

для которой существует представление

$$f(\vec{x}_q, \vec{x}_{n-q}) = f_1(\vec{x}_q)f_2(\vec{x}_{n-q}|\vec{x}_{n-q}),$$

где $f_1(\vec{x}_q)$ -частная плотность вектора $\vec{\xi}_q$, а $f_2(\vec{x}_{n-q}|\vec{x}_{n-q})$ - условная плотность $\vec{\xi}_{n-q}$ при условии $\vec{\xi}_q = \vec{x}_q$. В случае, если $f(\vec{x}_q, \vec{x}_{n-q}) = f(\vec{x})$ - многомерная нормальная плотность вектора $\vec{\xi}_n$

$$f(\vec{x}_n) = \frac{1}{2\pi^{n/2} |R_n|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}_n - \vec{\mu}_n)^T R_n^{-1}(\vec{x}_n - \vec{\mu}_n)\right) \quad (1.7)$$

с математическим ожиданием

$$\vec{\mu}_n = M\vec{\xi}_n = (\vec{\mu}_q^T, \vec{\mu}_{n-q}^T)^T$$

и невырожденной ковариационной матрицей

$$M(\vec{\xi}_n - \vec{\mu}_n)(\vec{\xi}_n - \vec{\mu}_n)^T = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix} = R_n,$$

то $f_1(\vec{x}_q)$ имеет вид (1.6), а условная плотность $f_2(\vec{x}_{n-q}|\vec{x}_{n-q})$ как хорошо известно, равна

$$f_2(\vec{x}_{n-q}|\vec{x}_{n-q}) = \frac{1}{2\pi^{(n-q)/2}|R_{22.1}|^{1/2}} \times \exp(-\frac{1}{2}(\vec{x}_{n-q} - \vec{v}_{n-q}(\vec{x}_q))^T R_{22.1}^{-1}(\vec{x}_{n-q} - \vec{v}_{n-q}(\vec{x}_q))). \quad (1.8)$$

Здесь R_{11} и R_{22} - ковариационные матрицы векторов $\vec{\xi}_q$ и $\vec{\xi}_{n-q}$, R_{12} и R_{21} - соответствующие взаимные ковариационные матрицы,

$$\vec{v}_{n-q}(\vec{x}_q) = M(\vec{x}_{n-q}|\vec{x}_q) = \vec{\mu}_{n-q} + R_{21}R_{11}^{-1}(\vec{x}_q - \vec{\mu}_q) - \quad (1.9)$$

условное среднее, при условии $\vec{\xi}_q = \vec{x}_q$, $R_{21}R_{11}^{-1}$ - матрица коэффициентов регрессии $\vec{\xi}_q$ на \vec{x}_{n-q} , а

$$R_{22.1} = R_{22} - R_{21}R_{11}^{-1}R_{12} - \quad (1.10)$$

матрица частных коэффициентов ковариации, не зависящая от \vec{x}_{n-q} . В этом случае алгоритм моделирования вектора $\vec{\xi}_n$ сводится к моделированию вектора $\vec{\xi}_q$ с плотностью (1.6), а вектора $\vec{\xi}_{n-q}$ с плотностью $f_2(\vec{x}_{n-q}|\vec{x}_q)$ в виде (1.8) по формуле [15]

$$\vec{\xi}_{n-q} = \vec{\mu}_{n-q} + R_{21}R_{11}^{-1}(\vec{x}_q - \vec{\mu}_q) + A_{22.1}\vec{\varphi}_{n-q}, \quad (1.11)$$

где $\vec{\varphi}_{n-q} = (\varphi_{q+1}, \dots, \varphi_n)^T$ - независимые между собой и от $\vec{\xi}_q$ нормальные случайные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями, а нижняя треугольная матрица $A_{22.1}$ такая, что $A_{22.1}A_{22.1}^T = R_{22.1}$. Вектор $\vec{\xi}_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T = (\vec{\xi}_q^T, \vec{\xi}_{n-q}^T)^T$, очевидно, распределен нормально со средним $\vec{\mu}_n = (\vec{\mu}_q^T, \vec{\mu}_{n-q}^T)^T$ и ковариационной матрицей (1.3). В дальнейшем без нарушения общности будем считать $\vec{\mu}_n$ нулевым вектором.

Процедура покомпонентного моделирования вектора $\vec{\xi}_n$ следует из представления плотности $f_2(\vec{x}_{n-q}|\vec{x}_q) =$

где \tilde{S}_k - матрица, полученная из S_k транспонированием относительно побочной диагонали. Если $S_k = \tilde{S}_k$ - матрица, симметричная относительно главной и побочной диагоналей одновременно, то $J_k S_k J_k = S_k$. В литературе [18] матрицу J_k вида (1.13) называют также матрицей отражения (reflection matrix). Очевидно также, что

$$J_k \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_k \\ \vdots \\ \xi_1 \end{Bmatrix}.$$

Векторы $b[k-1]$, $k=2, \dots, n$ связаны с элементами заданной корреляционной матрицей R уравнением

$$J_{k-1} R_{k-1} J_{k-1} \vec{b}[k-1] = \vec{r}[k-1] \quad (1.14)$$

где вектор $\vec{r}[k-1] = (r_{k-1,k}, \dots, r_{1k})^T$ связан с последним столбцом матрицы R_k соотношением

$$\vec{r}[k-1] = J_k \begin{Bmatrix} r_{1k} \\ \vdots \\ r_{k-1,k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_{k-1,k} \\ \vdots \\ r_{1k} \end{Bmatrix},$$

а d_{k-1} определяются выражениями

$$\begin{aligned} d_0^2 &= r_{11}, \\ d_{k-1}^2 &= r_{kk} - \vec{b}^T[k-1] \vec{r}[k-1]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Рассмотрим некоторые свойства этого метода. Для этого представим матрицы R_k , $k = 1, \dots, n$ в блочном виде

$$R_k = \begin{Bmatrix} R_{k-1} & J_{k-1} \vec{r}[k-1] \\ \vec{r}^T[k-1] J_{k-1} & r_{kk} \end{Bmatrix}. \quad (1.16)$$

Если R_n положительно определенная матрица, то все ее главные миноры положительны, поэтому из

$$\begin{aligned} \det(R_k) &= \det(R_{k-1})(r_{kk} - \vec{r}^T[k-1] J_{k-1} R_{k-1}^{-1} J_{k-1} \vec{r}[k-1]) = \\ &= \det(R_{k-1})(r_{kk} - \vec{r}^T[k-1] \vec{b}[k-1]) = \det(R_{k-1}) d_{k-1}^2 \end{aligned}$$

следует, что $d_k^2 > 0$ для всех $k = 1, \dots, n$, ($d_0 = 1$). Представим теперь преобразования (1.12) в виде

$$B_n \vec{\xi}_n = D_n \varphi_n, \quad (1.17)$$

где

$$B_n = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ -b_1[1] & 1 & \dots & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ -b_1[n-1] & \dots & -b_1[n-1] & 1 & & \end{array} \right\|, \quad (1.18)$$

$$D_n = \left\| \begin{array}{cccc} d_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{n-1} \end{array} \right\|. \quad (1.19)$$

Из (2.16) имеем

$$\vec{\xi}_n = B_n^{-1} D_n \vec{\varphi}_n = A_n \vec{\varphi}_n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} R_n &= M \vec{\xi}_n \vec{\xi}_n^T = A_n A_n^T = B_n^{-1} D_n D_n^T (B_n^{-1})^T = \\ &= B_n^{-1} D_n D_n (B_n^T)^{-1}. \end{aligned}$$

Поскольку $d_k^2 > 0$, $k = 0, \dots, n-1$, то матрица A_n невырожденная, следовательно,

$$R_n^{-1} = B_n^T D_n^{-1} D_n^{-1} B_n = T_n^T T_n, \quad (1.20)$$

где $T_n = (t_{ij})$ - нижняя треугольная матрица. Таким образом, если R_n - положительно определенная матрица, то преобразование (1.12) является невырожденным линейным преобразованием и вектор $\vec{\xi}_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ распределен нормально с нулевым средним и корреляционной матрицей R_n . Нижняя треугольная матрица B_n (1.18) получена разложением R_n^{-1} на произведение верхней (T_n^T) и нижней (T_n) треугольных матриц с последующим делением каждой j -той строки матрицы T_n на ее диагональный элемент, принадлежащей этой же строке, а D_n (1.19) представляет собой матрицу,

обратную к диагональной матрице, образованной из диагональных элементов матрицы T_n .

Действительно, если R_n положительно определена, а R_n^{-1} известна, то $t_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$ и

$$T_n = \begin{vmatrix} t_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} t_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_{22} & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21}/t_{22} & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{21}/t_{22} & t_{21}/t_{22} \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Очевидно также, что матрица A_n вида (1.5) связана с T_n соотношением $T_n = A_n^{-1}$.

Реализация алгоритма (1.12) для произвольной корреляционной матрицы R_n связана с решением системы уравнений (1.14), либо с разложением (1.20) матрицы R_n^{-1} на произведение двух треугольных. Поэтому этот алгоритм по трудоемкости соизмерим с алгоритмом (1.4),(2.4).

Задача существенно упрощается, если речь идет о моделировании стационарных последовательностей (ξ_1, \dots, ξ_n) с совместной корреляционной матрицей теплицева (или стационарного) вида. В этом случае метод условных математических ожиданий имеет принципиальное преимущество перед алгоритмом (1.4),(2.4), и позволяет вычислять элементы матрицы B_n по простым рекуррентным формулам.

1.3 Моделирование гауссовских векторов с корреляционными матрицами теплицева вида

В общем случае скалярная несимметричная матрица, относящаяся к классу теплицевых, имеет вид

$$A_n = \left\| \begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-n+1} & a_{-n+2} & a_{-n+3} & \cdots & a_0 & \end{array} \right\| \quad (1.21)$$

и полностью определяется своей первой строкой и первым столбцом. Отрицательные индексы используются, чтобы подчеркнуть несимметричность матрицы A_n . Подробную информацию о теплицевых матрицах можно найти в монографии В.В. Воеводина, Е.Е. Тыртышниковой [6].

Наша задача состоит в моделировании стационарного гауссовского вектора $\vec{\xi}_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ (для простоты будем считать, что его компоненты имеют нулевое среднее), у которого в отличие от векторов, рассмотренных в предыдущем параграфе, каждый коэффициент корреляции $r_{ij} = M\xi_i\xi_j$, $i, j = 1, \dots, n$ зависит лишь от модуля разности $i - j$, т.е. $r_{ij} = r_{|i-j|}$. В этом случае вектор $\vec{\xi}_n$ может быть интерпретирован, в частности, как набор из n последовательных элементов бесконечной стационарной последовательности $\dots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots$.

Нормированная корреляционная матрица $R_n = (r_{ij}) = (r_{|i-j|})$ такого вектора имеет вид

$$R_n = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{n-1} & \\ r_1 & 1 & r_1 & \cdots & r_{n-2} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n-1} & r_{n-2} & r_{n-3} & \cdots & 1 & \end{array} \right\| \quad (1.22)$$

и, в отличие от матрицы (1.21), симметрична, т.е. задается лишь первой строкой (либо первым столбцом). При этом она неотрицательно определена. На практике матрицы вида (1.22) встречаются достаточно часто, например, в тех случаях, когда исследуемый процесс приближенно можно считать стационарным.

Рассмотрим модификацию алгоритма моделирования гауссовских векторов (1.12),(1.14),(1.15) из предыдущего параграфа учитывая специфику матрицы (1.22). Прежде всего отметим, что матрица (1.22) в отличие от матрицы (1.3), симметрична не только относительно главной диагонали, но также и относительно побочной диагонали, поэтому имеет место соотношение

$$J_k R_k J_k = R_k.$$

Используя блочное представление матрицы R_{k+1} вида (1.12), положим для произвольного $k = 1, 2, \dots$

$$R_k \vec{b}[k] = \vec{r}_k, \quad R_{k+1} \vec{b}[k+1] = \vec{r}_{k+1}, \quad (1.23)$$

$$R_k = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & r_1 & \cdots & r_{k-1} \\ r_1 & 1 & \cdots & r_{k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k-1} & r_{k-2} & \cdots & 1 \end{array} \right\|, \quad R_{k+1} = \left\| \begin{array}{cc} R_k & J_k \vec{r}_k \\ \vec{r}_k^T J_k & 1 \end{array} \right\|,$$

$$\vec{b}[k] = (b_1[k], \dots, b_k[k])^T, \quad \vec{b}[k+1] = (b_1[k+1], \dots, b_{k+1}[k+1])^T.$$

Схема (1.12) для моделирования гауссовских векторов с корреляционной матрицей (1.22) принимает вид

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \varphi_1, \\ \xi_2 &= b^T[1] J_1 \vec{\xi}_1 + d_1 \varphi_1, \\ &\dots \\ \xi_n &= b^T[n-1] J_{n-1} \vec{\xi}_{n-1} + d_{n-1} \varphi_n. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Рассмотрим обратную к R_{k+1} блочную матрицу:

$$R_{k+1}^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} R_k^{-1} + \frac{J_k \vec{b}[k] \vec{b}^T[k] J_k}{d_k^2} & -\frac{J_k \vec{b}[k]}{d_k^2} \\ -\frac{\vec{b}^T[k] J_k}{d_k^2} & \frac{1}{d_k^2} \end{array} \right\|,$$

где

$$d_k^2 = 1 - \vec{r}^T[k] R_k \vec{r}[k] = 1 - \vec{b}^T[k] \vec{r}[k] = 1 - \vec{r}^T[k] \vec{b}[k].$$

Разрешим второе уравнение в $R_{k+1} \vec{b}[k+1] = \vec{r}_{k+1}$ в (1.23) относительно $\vec{b}[k+1]$, т.е.

$$\vec{b}[k+1] = R_{k+1}^{-1} \vec{r}_{k+1}$$

Алгоритм для вычисления векторов регрессии $\vec{b}[k]$ и остаточных дисперсий d_k^2 принимает вид

$$\begin{aligned} (b_1[k+1], \dots, b_k[k+1])^T &= \vec{b}[k] - b_{k+1}[k+1] J_k \vec{b}[k], \\ b_{k+1}[k+1] &= (r_{k+1} - \vec{r}_k^T J_k \vec{b}[k]) / d_k^2, \\ d_k^2 &= 1 - \vec{r}_k^T R_k \vec{r}_k = 1 - r_k^T \vec{b}[k]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Вычисления начинаются с $k=1$ при $b[1] = b_1[1] = r_1$ и при $k = n-1$ дают решение $\vec{b}[n]$ уравнения $R_n \vec{b}[n] = \vec{r}_n$. Процедуру (1.25) обычно называют алгоритмом Дурбина. Впервые он был опубликован в 1962 г. Дж. Дурбином в работе [14] для решения системы линейных уравнений (1.23) с корреляционной матрицей вида (1.22). Этот алгоритм позволяет в принципе вычислять $\vec{b}[k]$ и d_k для произвольной матрицы вида (1.22). При этом для вычисления последующих значений d_k^2 и $\vec{b}[k+1]$ используется вектор $\vec{b}[k]$ с предыдущего шага. Алгоритм прост для программирования и может быть использован для моделирования гауссовских векторов большой размерности.

Для положительно определенной теплицевой корреляционной матрицы R_n , как и в общем случае, справедливо соотношение

$$\det(R_{k+1}) = \det(R_k) d_k^2 > 0$$

для всех $k = 1, \dots, n-1$. Вычисляя последовательно

$$\det(R_n) = \det(R_{n-1}) d_{n-1}^2 = \det(R_{n-2}) d_{n-2}^2 d_{n-1}^2 = \dots$$

получим

$$\det(R_n) = d_1^2 d_2^2 \dots d_{n-1}^2, \quad d_1^2 = 1$$

1.4 Вопросы регуляризации алгоритма, контроль точности вычислений

Численные эксперименты для различных корреляционных матриц $R_n R$ типа (1.22) показали, что в ряде случаев алгоритм (1.25) вычислительно неустойчив: за счет погрешностей при задании r_h и погрешностей, накапливающихся при вычислениях, на некотором шаге $k \leq n$ частный коэффициент корреляции $b_{k+1}[k+1]$ по абсолютному значению становится равным или большим единицы, так что $d_{k+1}^2 = (1 - b_{k+1}^2[k+1])d_k^2$ обращается в нуль или становится отрицательным. Например, при $r_h = \exp(-\alpha h^2)$, $\alpha = 10^{-5}$, неустойчивость проявляется уже на первых нескольких шагах.

В работах [20,27,28] рассматриваются некоторые простые приемы регуляризации алгоритма (1.25), обеспечивающие устойчивость вычислений и с точностью до ошибок округления, накапливающихся в процессе вычислений, сохраняющие стационарность моделируемой последовательности.

1. Корреляционная функция $G_n = (1 - \varepsilon)R_n + \varepsilon I_n$.

Этот способ регуляризации сводится к моделированию гауссовских векторов с корреляционной матрицей

$$G_n = (1 - \varepsilon)R_n + \varepsilon I_n. \quad (1.30)$$

где ε - любое число из интервала $[0, 1]$, I_n - единичная матрица размерности $n \times n$. Если не требуется высокая точность при моделировании временных рядов, то вместо вектора $\vec{\xi}_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ с корреляционной матрицей R_n достаточно ограничиться построением вектора $\vec{\zeta}_n = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)^T$ с корреляционной матрицей G_n т.к. разность между r_k и g_k при $k \geq 1$ не превосходит ε :

Отметим, что элементы этих векторов связаны между собой простым соотношением

$$\zeta_k = \sqrt{1 - \varepsilon} \xi_k + \sqrt{\varepsilon} \eta_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

где $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ независимые между собой и от $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ случайные величины с нулевыми средними значениями и единичными дисперсиями. Параметр ε находится экспериментально путем нескольких пробных реализаций алгоритма (1.25) (например, сначала для $\varepsilon = 10^{-10}$, затем для $\varepsilon = 10^{-9}$ и т.д.), пока не будет обеспечена устойчивость вычислительного процесса. Опыт показывает, что устойчивость появляется даже при весьма малых ε . Так, например, при $r_h = \exp(-\alpha h^2)$, $\alpha = 10^{-5}$, $\varepsilon = 10^{-5}$ алгоритм (1.25) удается продолжить на тысячи шагов, хотя, как уже отмечалось, при $\varepsilon = 0$ он оказывается неустойчивым на первых нескольких шагах.

Отметим также, что собственные числа $\lambda(G_n)$ матрицы G_n и собственные числа $\lambda(R_n)$ матрицы R_n связаны соотношением

$$\lambda(G_n) = \varepsilon + (1 - \varepsilon)\lambda(R_n).$$

Даже если среди собственных чисел матрицы R имеются отрицательные (при статистическом моделировании гидрометеорологических процессов такие ситуации возникают достаточно часто, например, когда приходится иметь дело с выборочными матрицами, вычисленными по данным реальных наблюдений, либо при моделировании негауссовских процессов методом "обратных функций распределения"), то выбором подходящего ε матрицу G_n всегда можно сделать положительно определенной и сколь угодно хорошо обусловленной в том смысле, что алгоритм (1.25) для нее реализуется без существенного накопления ошибок на необходимое число шагов.

2. Сдвоенный алгоритм.

Устойчивый алгоритм для матрицы G_n вида (1.30) из предыдущего пункта можно использовать для более точного вычисления частных коэффициентов корреляции $b_{k+1}[k+1]$ [20,27]. В знаменателе выражения для $b_{k+1}[k+1]$ в (1.25) фигурирует величина $d_k^2 = 1 - r_k^T \vec{b}[k]$, которая часто даже при небольших k становится исключительно малой. Это значит, что число $r_k^T \vec{b}[k]$ близко к единице. Поскольку $b_{k+1}[k+1]$ по абсолютному значению не долж-

но превосходить единицу, то, следовательно, и в числителе упомянутого выражения вычитаются друг из друга близкие числа. В этом состоит главный источник погрешностей, иногда приводящих к неустойчивости алгоритма (1.25). Для повышения устойчивости следует изменить способ вычисления частных коэффициентов корреляции $b_{k+1}[k+1]$.

Для наглядности перепишем еще раз алгоритм (1.25) применительно к матрице $G_n = (g_{ij})$ в новых обозначениях: вектор регрессии $\vec{b}[k]$ обозначим как $\vec{\beta}[k]$, а остаточную дисперсию d_k^2 как δ_k^2 . Имеем

$$\begin{aligned} (\beta_1[k+1], \dots, \beta_k[k+1])^T &= \vec{\beta}[k] - \beta_{k+1}[k+1] J_k \vec{\beta}[k], \\ \beta_{k+1}[k+1] &= (g_{k+1} - \vec{g}_k^T J_k \vec{\beta}[k]) / \delta_k^2, \\ \delta_k^2 &= 1 - \vec{g}_k^T R_k \vec{g}_k = 1 - \vec{g}_k^T \vec{\beta}[k]. \end{aligned} \quad (1.31)$$

где, как и для R_n вектор $\vec{g}_k = (g_1, \dots, g_k)^T$ связан с последним столбцом матрицы G_k соотношением

$$\vec{g}_k = (g_1, \dots, g_k)^T J_k.$$

Точность результатов вычислений можно повысить, если путем тождественных преобразований избавиться от малости величин, фигурирующих в числителе и знаменателе выражения для $b_{k+1}[k+1]$ в алгоритме (1.25). При этом величины из (1.31) для матрицы G_n используются как вспомогательные, а ε - как регуляризирующий параметр. Вычисление $\vec{b}[k]$ и d_k^2 теперь осуществляется с помощью

следующего двоянного алгоритма

$$\begin{aligned}
\vec{\beta}[1] &= \beta_1[1] = g_1 = (1 - \varepsilon)r_1, & \vec{b}[1] &= \vec{b}_1[1] = r_1, \\
k &= 1, \dots, n - 1, \\
\delta_k^2 &= 1 - (1 - \varepsilon)\vec{r}_k^T \vec{\beta}[k], \\
\beta_{k+1}[k + 1] &= (g_{k+1} - \vec{g}_k^T J_k \vec{\beta}[k]) / \delta_k^2, \\
b_{k+1}[k + 1] &= \frac{\beta_{k+1}[k+1]/(1-\varepsilon) + \vec{r}_k^T J_k (\vec{\beta}[k] - \vec{b}[k]) / \delta_k^2}{\vec{r}_k^T [(1-\varepsilon)\vec{\beta}[k] - \vec{b}[k]] / \delta_k^2 + 1}, \\
(\beta_1[k + 1], \dots, \beta_k[k + 1])^T &= \vec{\beta}[k] - \beta_{k+1}[k + 1] J_k \vec{\beta}[k], \\
(b_1[k + 1], \dots, b_k[k + 1])^T &= \vec{b}[k] - b_{k+1}[k + 1] J_k \vec{b}[k], \\
d_k^2 &= 1 - r_k^T \vec{b}[k].
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Алгоритм (1.32), несмотря на двойные вычисления, имеет существенное преимущество перед алгоритмом (1.25): во многих случаях, когда алгоритм (1.25) неустойчив, вычисления по формулам (1.32) проходят без осложнений на тысячи шагов, однако, в наиболее сложных случаях, например, если элементы матрицы R_n вычисляются по формуле $r_h = \exp(-\alpha h^2)$ при $\alpha = 10^{-5}$, неустойчивость, хоть и не на первых шагах, но все же возникает. В связи с этим целесообразно повторно воспользоваться приемом регуляризации по способу I., т.е. моделировать последовательность ξ_1, \dots, ξ_n не с корреляционной матрицей R_n , а с матрицей $Q_n = (1 - \varepsilon_0)R_n + \varepsilon_0 I_n$, но применительно к алгоритму (1.32). Если в рассмотренном выше примере при $\alpha \simeq 10^{-5}$ величина ε имела порядок 10^{-5} , то в данном случае процесс вычислений становится устойчивым при величине ε_0 порядка 10^{-9} , т.е. отличие заданной матрицы от "подправленной" оказывается пренебрежимо мало.

Отметим, что рассмотренные способы регуляризации алгоритмически не нарушают теплицев характер заданной корреляционной матрицы R_n . В качестве подправленных используются также теплицевы матрицы G_n и Q_n . Тем не менее в процессе вычислений ошибки накапливаются и имеют тенденцию расти к правому нижнему углу матрицы, причем сама матрица становится, вообще говоря, нестационарной (нетеплицевой).

3. Оценка точности моделирования

О точности моделирования мы можем судить по различию между заданной корреляционной матрицей и той корреляционной матрицей, которая соответствует вычисленным векторам регрессии $\vec{b}[k] = (b_1[k], \dots, b_k[k])^T$, содержащим погрешности. В данном разделе будет рассмотрен алгоритм для вычисления оценки этой погрешности. Задача состоит в том, чтобы восстановить корреляционную матрицу по вычисленным векторам регрессии.

Для вычисления матрицы R_n по формуле (предполагается, что при вычислении матрицы B_n накапливаются погрешности)

$$R_n = B_n^{-1} D_n D_n (B_n^T)^{-1} \quad (1.33)$$

требуется обращать матрицу B_n . Приведем соответствующий алгоритм обращения. Пусть $\vec{x}^{\{k\}} = (x_1^{\{k\}}, \dots, x_n^{\{k\}})^T$ - это k -ый столбец матрицы B_n^{-1} , тогда

$$B_n^{-1} \vec{e}_k = \vec{x}^{\{k\}},$$

откуда

$$B_n \vec{x}^{\{k\}} = \vec{e}_k.$$

Из последнего равенства (с учётом специфики матрицы B_n) следует алгоритм вычисления компонент вектора $\vec{x}^{\{k\}}$:

$$\begin{aligned} x_j^{\{k\}} &= 0, & j &= 1, \dots, k-1, \\ x_j^{\{k\}} &= 1, & j &= k, \\ x_j^{\{k\}} &= b_{j-1}[j-1]x_1^{\{k\}} + \dots + b_1[j-1]x_{j-1}^{\{k\}}, & j &= k+1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Из формул (1.34) следует, что матрица B_n^{-1} может быть записана в виде

$$B_n^{-1} = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2^{\{1\}} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3^{\{1\}} & x_3^{\{2\}} & 1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{\{1\}} & x_n^{\{2\}} & x_n^{\{3\}} & \dots & x_n^{\{n-1\}} & 1 \end{array} \right\|.$$

Используя последнее равенство и представление (1.35) в наших обозначениях можно записать формулы для нахождения диагональных элементов матрицы R_n :

$$\begin{aligned}
R_{11} &= 1, \\
R_{22} &= (x_2^{\{1\}})^2 + d_1^2, \\
&\dots \\
R_{jj} &= (x_j^{\{1\}})^2 + d_1^2(x_j^{\{2\}})^2 + \dots + d_{j-2}^2(x_j^{\{j-1\}})^2 + d_{j-1}^2, \\
&\dots \\
R_{nn} &= (x_n^{\{1\}})^2 + d_1^2(x_n^{\{2\}})^2 + \dots + d_{n-2}^2(x_n^{\{n-1\}})^2 + d_{n-1}^2.
\end{aligned}$$

Так как при каждой итерации алгоритма (1.34) определяется лишь один столбец матрицы B_n^{-1} , то для нахождения элемента R_{nn} требуется n применений этого алгоритма. А поскольку матрица B_n не хранится в памяти компьютера, то для вычисления каждого столбца $\vec{x}^{\{k\}}$ необходимо использовать алгоритм (1.31)-(1.32). Это обстоятельство делает данный алгоритм подсчёта матрицы R_n трудоёмким по времени, однако данные вычисления можно совмещать с моделированием большого числа траекторий, которые требуются для оценки статистических характеристик процесса. Этот алгоритм требует небольшого количества памяти ЭВМ (порядка размерности вектора $\vec{b}[k]$), но при этом в n раз увеличивается время вычислений. При этом отметим, что данный алгоритм легко распараллеливается, поэтому может быть эффективно реализован на многопроцессорных ЭВМ.

Аналогично, могут быть вычислены и недиагональные элементы R_{ij} матрицы R_n . В связи с большой трудоёмкостью данного алгоритма в качестве иллюстрации приведём Таблицу 5.1, где сравниваются только элементы первого столбца реальной и расчётной корреляционных матриц.

Таблица 1.1: Элементы R_{11} , $R_{2880,1}$, $R_{5760,1}$, $R_{8640,1}$ реальной корреляционной матрицы (первая строка) и вычисленной по векторам регрессии (вторая строка).

1.000000	0.159333	0.087486	0.000075
1.000000	0.159339	0.087414	0.000102

1.5 Моделирование процессов авторегрессии с заданной корреляционной структурой

С точки зрения многих приложений для моделирования последовательностей ξ_1, \dots, ξ_n большой длины оказывается достаточным точно учитывать корреляционную зависимость между ξ_t и ξ_{t+h} , $t = 1, \dots, n$ только для $h = 1, \dots, m$, где $m < n$ — некоторый характерный масштаб корреляции. Например, возникают ситуации, когда при $h > m$ эта зависимость мала, либо когда ее достаточно учитывать лишь приближенно. В связи с этим рассмотрим следующую модификацию процедуры (1.24)-(1.25). При $t = 1, \dots, m$ схема (1.24) остается без изменений, а для $t = m + 1, \dots, n - 1$ полагаем

$$\vec{b}[t] = (b_1[t-1], \dots, b_{t-1}[t-1], 0, \dots, 0)^T, \quad d_{t-1} = d_m.$$

Схема (1.24) в скалярной записи принимает вид

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \varphi_1, \\ \xi_2 &= b_1[1]\xi_1 + d_1\varphi_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \xi_{m+1} &= b_1[m]\xi_m + \dots + b_m[m]\xi_1 + d_m\varphi_{m+1}, \\ &\dots\dots\dots \\ \xi_t &= b_1[m]\xi_{t-1} + \dots + b_m[m]\xi_{t-m} + d_m\varphi_t, \\ &\dots\dots\dots \\ \xi_n &= b_1[m]\xi_{n-1} + \dots + b_m[m]\xi_{n-m} + d_m\varphi_n. \end{aligned}$$

При неограниченном увеличении n для $t = m + 1, m + 2, \dots$ последовательность ξ_t можно представить в виде стохастиче-

ского разностного уравнения

$$\xi_t = b_1[m]\xi_{t-1} + \dots + b_m[m]\xi_{t-m} + d_m\varphi_t$$

с начальными значениями ξ_1, \dots, ξ_m . При $t = m + 1, \dots$ вектор $\vec{b}[m]$ и скаляр d_m - фиксированы, поэтому упростим обозначения и положим $b_1[m] = b_1, \dots, b_m[m] = b_m, d_m = d$. В этих обозначениях процесс ξ_t принимает вид

$$\xi_t = b_1\xi_{t-1} + \dots + b_m\xi_{t-m} + d\varphi_t. \quad (1.35)$$

Определение 1. Авторегрессионным процессом ξ_t порядка называют последовательность случайных величин $\dots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots$, удовлетворяющих разностному уравнению (1.35) при $t = \dots, -1, 0, 1, \dots$, где b_1, \dots, b_m - вещественные коэффициенты (коэффициенты регрессии), а d - вещественная константа, нормирующая дисперсию процесса.

Нас будет интересовать стационарное решение уравнения (1.35); в связи с этим необходимо рассмотреть тесно связанный с процессом авторегрессии процесс скользящего среднего. Подробно такого типа процессы рассмотрены в [2,4].

Хорошо известно (напр. [15]), что стохастическое разностное уравнение (1.34) имеет стационарное решение в виде бесконечного, направленного "в прошлое" и сходящегося в среднеквадратическом смысле процесса скользящего среднего

$$\xi_t = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varphi_{t-k}, \quad (1.36)$$

если все корни характеристического уравнения

$$\lambda^m = b_1\lambda^{m-1} + \dots + b_m \quad (1.37)$$

по модулю меньше единицы.

В дальнейшем будем рассматривать $\dots, \varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1, \dots$ как последовательность гауссовских величин с нулевым средним и единичной дисперсией.

Так как согласно (1.34), φ_t и $\xi_{t-2}, \xi_{t-1}, \dots$ некоррелированы, то дисперсия ρ_0 , ($\rho_0 = M\xi_t^2$) величины ξ_t и коэффициент d в (1.30) связаны соотношением

$$\rho_0 = d^2 + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \rho_k. \quad (1.38)$$

Константу d удобно выбирать из условия $\rho_0 = 1$. В дальнейшем (в скалярном случае) будем иметь дело с нормированным процессом (1.34), т.е. будем считать $\rho_0 = 1$.

Благодаря представлению (1.31), процесс авторегрессии (1.35) при заданных b_1, \dots, b_m (причем таких, что корни характеристического уравнения (1.37) по модулю меньше единицы), является стационарным процессом, поэтому его корреляционная функция $\rho_0 = 1$, $\rho_1, \rho_2 \dots$ является четной функцией ($\rho_0 = 1$, $\rho_1 = \rho_{-1}, \rho_2 = \rho_{-2}$) и удовлетворяет разностному уравнению Юла-Уолкера [2,4]

$$\rho_h = b_1 \rho_{h-1} + b_2 \rho_{h-2} + \dots + b_m \rho_{h-m}, \quad h = 1, 2, \dots \quad (1.39)$$

связывающее значения корреляционной функции ρ_s при $s = 1 - m, 2 - m, \dots$

С точки зрения многих приложений для моделирования последовательностей ξ_1, \dots, ξ_n большой длины с помощью схемы (1.24) оказывается достаточным точно учитывать корреляционную зависимость между ξ_t и ξ_{t+h} , $t = 1, \dots, n$ только для $h = 1, \dots, m$, где $m < n$ - некоторый характерный масштаб корреляции. Например, возникают ситуации, когда при $h > m$ эта зависимость мала, либо когда ее достаточно учитывать лишь приближенно, то для построения процесса мы можем использовать коэффициенты $b_1[m], \dots, b_m[m]$.

R_{m+1} действительно являются коэффициентами авторегрессионного разностного уравнения вида (1.35), или, соответственно, что составленное на их основе характеристическое уравнение (1.37) имеет корни, находящиеся внутри единичной окружности на комплексной плоскости [22]. Поскольку авторегрессионное уравнение имеет только одно стационарное решение вида (1.34) и только одну корреляционную функцию, удовлетворяющую уравнениям Юла - Уолкера (1.39), то начальные значения этой корреляционной функции будут совпадать с $r_0 = 1, r_1, r_2, \dots, r_m$ в силу (1.40). Любое последующее значение находится рекурсивно с помощью (1.39).

Утверждение 1.1. Пусть вещественная симметричная положительно определенная матрица A и вещественная матрица того же порядка B таковы, что матрица $C = A - BAB^T$ является неотрицательно определенной. Тогда вещественные корни матрицы B по абсолютному значению не превосходят 1, а комплексные корни, если они имеются, по модулю меньше 1.

Доказательство. Положим $S = A^{-1/2}BA^{1/2}$. Тогда

$$\begin{aligned} C &= A^{1/2}A^{1/2} - A^{1/2}A^{-1/2}BA^{1/2}(A^{1/2})^T B^T (A^{-1/2})^T (A^{1/2})^T = \\ &= A^{1/2}(I - SS^T)A^{1/2}. \end{aligned}$$

Здесь $A^{1/2}$ - симметричная матрица, вследствие симметрии матрицы A . Так как $A > 0$, то $A^{1/2}$ - не вырождена и из $A^{-1/2}CA^{-1/2} = I - SS^T$ следует, что матрица $I - SS^T$ неотрицательно определена (см. например, [7], 12.61- 12.64)

Аналогично SS^T также является неотрицательно определенной матрицей. Действительно,

$$SS^T = A^{-1/2}BA^{1/2}(A^{1/2})^T B^T (A^{-1/2})^T = A^{-1/2}BAB^T(A^{-1/2})^T,$$

а $A^{-1/2}B$ и A удовлетворяют условиям утверждения 12.62.

Если $\lambda(I - SS^T)$ и $\lambda(SS^T)$ - собственные числа этих матриц, то из $\lambda(I - SS^T) \geq 0$ следует $0 \leq \lambda(SS^T) \leq 1$ и, в частности,

$$0 \leq \max \lambda(SS^T) \leq 1. \quad (1.42)$$

Действительно, из общности базиса матриц I и SS^T следует

$(I - SS^T)\vec{x} = I\vec{x} - SS^T\vec{x} = 1\vec{x} - \lambda(SS^T)\vec{x} = \lambda(I - SS^T)\vec{x}$ и, соответственно, $\lambda(I - SS^T) = 1 - \lambda(SS^T) \geq 0$.

При этом $\lambda(S) = \lambda(S^T) = \lambda(B) = \lambda(B^T)$. Действительно, из

$$\begin{aligned} |S - \lambda I| &= |A^{-1/2}BA^{1/2} - \lambda A^{-1/2}A^{1/2}| = \\ &= |A^{-1/2}(B - \lambda I)A^{1/2}| = |A^{-1/2}| |(B - \lambda I)| |A^{1/2}| = |B - \lambda I| \end{aligned}$$

следует, что корни этих полиномов совпадают, следовательно $\lambda(S) = \lambda(B)$. Остальные равенства следуют из того, что определитель прямой и транспонированной матриц совпадают.

Пусть $\lambda(B) = \lambda(S^T)$ - вещественное собственное число матриц B и S^T , а $\vec{\varphi}$ - соответствующий ему собственный вектор матрицы S^T . Тогда можно записать $S^T\vec{\varphi} = \lambda(B)\vec{\varphi}$ и

$$\lambda^2(B) = \frac{\vec{\varphi}^T SS^T \vec{\varphi}}{\vec{\varphi}^T \vec{\varphi}}.$$

Матрица SS^T - симметричная матрица $((SS^T)^T = (S^T)^T(S)^T = SS^T)$, следовательно, все ее собственные числа вещественны. Пусть $\lambda_1(SS^T) \geq \dots \geq \lambda_m(SS^T)$, где m размерность матрицы SS^T . Известно, что для любого вектора ненулевого \vec{x} имеют место равенства [7]

$$\sup_{\vec{x} \neq \vec{0}} \frac{\vec{x}^T SS^T \vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x}} = \lambda_1(SS^T), \quad \inf_{\vec{x} \neq \vec{0}} \frac{\vec{x}^T SS^T \vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x}} = \lambda_m(SS^T). \quad (1.43)$$

Из (1.43) с учетом (1.42) получим

$$\lambda^2(B) = \frac{\vec{\varphi}^T SS^T \vec{\varphi}}{\vec{\varphi}^T \vec{\varphi}} \leq \max \lambda(SS^T) \leq 1.$$

Доказательство равенств (1.43). Любой вектор \vec{x} можно записать в виде

$$\vec{x} = C_1 \vec{P}_1 + \dots + C_m \vec{P}_m.$$

Тогда

$$\frac{\vec{x}^T SS^T \vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x}} = \frac{C_1^2 \lambda_1 + \dots + C_m^2 \lambda_m}{C_1^2 + \dots + C_m^2}.$$

$\sup_{\vec{C} \neq \vec{0}}$ и $\inf_{\vec{C} \neq \vec{0}}$ этого выражения относительно векторов равны, соответственно

$\lambda_1(SS^T)$ и $\lambda_m(SS^T)$, при этом \sup достигается при $\vec{x} = \vec{P}_1$, а \inf - при $\vec{x} = \vec{P}_m$.

Пусть теперь $\lambda(B) = \lambda(S^T) = u + iv$ - комплексное собственное число матриц B и S^T , а $\vec{\varphi} = \vec{a} + i\vec{b}$ - соответствующий ему комплексный собственный вектор матрицы S^T . Поскольку матрица S^T - вещественная, то существует также комплексно сопряженное собственное число $\lambda^*(B) = \lambda^*(S^T) = u - iv$ матриц B и S^T и соответствующий ему комплексно сопряженный собственный вектор $\vec{\varphi}^* = \vec{a} - i\vec{b}$ матрицы S^T . Тогда можно записать $S^T \vec{\varphi} = \lambda(B) \vec{\varphi}$ и $S^T \vec{\varphi}^* = \lambda^*(B) \vec{\varphi}^*$ и

$$\lambda(B) \lambda^*(B) = |\lambda(B)|^2 = \frac{\vec{\varphi}^T SS^T \vec{\varphi}^*}{\vec{\varphi}^T \vec{\varphi}^*} = \frac{\vec{a}^T SS^T \vec{a} + \vec{b}^T SS^T \vec{b}}{\vec{a}^T \vec{a} + \vec{b}^T \vec{b}}.$$

Так как SS^T - симметричная матрица, то

$$\frac{\vec{\varphi}^T SS^T \vec{\varphi}^*}{\vec{\varphi}^T \vec{\varphi}^*} \leq \max \lambda(SS^T).$$

Равенство здесь возможно, если

$$\vec{a} = a \vec{\sigma}, \quad \vec{b} = b \vec{\sigma},$$

где $\vec{\sigma}$ - вещественный собственный вектор матрицы SS^T , соответствующий ее максимальному собственному числу (в силу ее симметрии), а a и b - произвольные ненулевые вещественные константы. Тогда было бы

$$\frac{a \vec{\sigma}^T SS^T a \vec{\sigma} + b \vec{\sigma}^T SS^T b \vec{\sigma}}{a \vec{\sigma}^T a \vec{\sigma} + b \vec{\sigma}^T b \vec{\sigma}} = \frac{(a^2 + b^2) \vec{\sigma}^T SS^T \vec{\sigma}}{(a^2 + b^2) \vec{\sigma}^T \vec{\sigma}} = \frac{\vec{\sigma}^T SS^T \vec{\sigma}}{\vec{\sigma}^T \vec{\sigma}}.$$

Покажем, что при $\lambda(B) = \lambda(S^T) = u + iv$, $v \neq 0$ эти условия не выполнимы. Из $S^T \vec{\varphi} = \lambda(B) \vec{\varphi}$ и $S^T \vec{\varphi}^* = \lambda^*(B) \vec{\varphi}^*$ и $\lambda(B) = \lambda(S^T) = u + iv$ и $\vec{\varphi} = \vec{a} + i\vec{b}$ имеем

$$S^T(\vec{a} + i\vec{b}) = (u + iv)(\vec{a} + i\vec{b}) = u\vec{a} - v\vec{b} + i(u\vec{b} + v\vec{a}).$$

Приравнивая вещественные и мнимые части в этом выражении получаем

$$\begin{aligned} S^T \vec{a} &= u\vec{a} - v\vec{b}, \\ S^T \vec{b} &= u\vec{b} + v\vec{a}. \end{aligned}$$

Если $\vec{a} = a\vec{\sigma}$, $\vec{b} = b\vec{\sigma}$, то эти равенства примут вид

$$\begin{aligned} S^T a\vec{\sigma} &= ua\vec{\sigma} - vb\vec{\sigma}, \\ S^T b\vec{\sigma} &= ub\vec{\sigma} + va\vec{\sigma}. \end{aligned}$$

Подедив эти выражения на a и b получим

$$\begin{aligned} S^T \vec{\sigma} &= (u - v\frac{b}{a})\vec{\sigma}, \\ S^T \vec{\sigma} &= (u + v\frac{a}{b})\vec{\sigma}. \end{aligned}$$

Обозначим $c = \frac{b}{a}$ и приравняем правые части этих выражений. В результате получим

$$u - vc = u + v\frac{1}{c},$$

откуда, поскольку $v \neq 0$

$$c + \frac{1}{c} = 0$$

или $c^2 = -1$, $c = \pm i$. Следовательно a и b - комплексные, а это противоречит условию, чтобы они были вещественны.

Таким образом, для комплексных собственных чисел

$$\begin{aligned} \lambda(B)\lambda^*(B) &= |\lambda(B)|^2 = \frac{\vec{\varphi}^T S S^T \vec{\varphi}^*}{\vec{\varphi}^T \vec{\varphi}^*} = \\ &= \frac{\vec{a}^T S S^T \vec{a} + \vec{b}^T S S^T \vec{b}}{\vec{a}^T \vec{a} + \vec{b}^T \vec{b}} < \max \lambda(S S^T) \leq 1 \end{aligned}$$

Утверждение доказано

Утверждение 1.2. Если R_{m+1} - положительно определенная матрица, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$ - решение уравнения

$$R_m \vec{b} = \vec{r}_m,$$

то $+1$ не может быть корнем уравнения

$$\lambda^m = b_1 \lambda^{m-1} + \dots + b_m \lambda.$$

Доказательство. Положим

$$s_k = b_1[k] + \dots + b_k[k], \quad s_{k+1} = b_1[k+1] + \dots + b_{k+1}[k+1],$$

где $\vec{b}[k]$ и $\vec{b}[k+1]$ решения уравнений $R_k \vec{b}[k] = \vec{r}_k$ и $R_{k+1} \vec{b}[k+1] = \vec{r}_{k+1}$. Эти решения могут быть получены с помощью рекуррентного алгоритма (1.25) в виде

$$\begin{aligned} \vec{b}[1] &= b_1[1], \\ k &= 1, \dots, m-1, \\ (b_1[k+1], \dots, b_k[k+1])^T &= \vec{b}[k] - b_{k+1}[k+1] J_k \vec{b}[k], \\ b_{k+1}[k+1] &= (r_{k+1} - \vec{r}_k^T J_k \vec{b}[k]) / d_k^2, \\ d_k^2 &= 1 - \vec{r}_k^T R_k \vec{r}_k = 1 - r_k^T \vec{b}[k]. \end{aligned}$$

Используя соотношения

$$(b_1[k+1], \dots, b_k[k+1])^T = \vec{b}[k] - b_{k+1}[k+1] J_k \vec{b}[k]$$

для $k = 1, \dots, m-1$ получим

$$s_1 = b_1[1], \quad s_{k+1} = (1 - b_{k+1}[k+1]) s_k + b_{k+1}[k+1]. \quad (1.44)$$

Таким образом, s_k удовлетворяет разностному уравнению первого порядка с начальным значением $s_1 = b_1[1] = r_1$.

Из положительной определенности матрицы R_{m+1} следует, что все ее подматрицы вида R_k при $k = 1, \dots, m$ также положительно определены. Из неравенства

$$\begin{aligned} \det(R_{k+1}) &= \det(R_k) (1 - \vec{r}_k^T \vec{b}[k]) = \det(R_k) d_k^2 \\ &= \det(R_k) (1 - b_k^2[k]) d_{k-1}^2 > 0 \end{aligned}$$

следует, что

$$b_k^2[k] < 1 \quad (1.45)$$

для всех $k = 1, \dots, m$.

Если представить s_{k+1} в виде $s_{k+1} = s_k + b_{k+1}[k+1](1 - s_k)$, то в силу линейности s_{k+1} относительно s_k , эта функция может принять значение 1, при $s_k \neq 1$ только, если $b_{k+1}[k+1] = 1$, а это невозможно в силу условия (1.45).

В силу (1.44) $s_1 = b_1[1] = r_1 \neq 1$, но тогда $s_2 \neq 1$. По индукции из этого следует, что

$$s_m = b_1[m] + \dots + b_m[m] \neq 1.$$

а это означает также $b_1 + \dots + b_m \neq 1$, так что $+1$ не может быть корнем уравнения

$$\lambda^m = b_1\lambda^{m-1} + \dots + b_m\lambda$$

Утверждение доказано

Следующее утверждение является следствием предыдущего.

Утверждение 1.3. Если R_{m+1} - положительно определенная матрица, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$ - решение уравнения

$$R_m \vec{b} = \vec{r}_m,$$

то -1 не может быть корнем уравнения

$$\lambda^m = b_1\lambda^{m-1} + \dots + b_m\lambda.$$

Доказательство. Рассмотрим диагональную матрицу Ω_m с элементами $\omega_k = (-1)^k$, $k = 1, \dots, m$ и аналогично устроенную расширенную матрицу Ω_{m+1} . Так как $\det(\Omega_{m+1}) \neq 0$, то симметричная матрица $R_{m+1}^0 = \Omega_{m+1} R_{m+1} \Omega_{m+1}$ будет положительно определенной. Кроме того, R_{m+1}^0 - теплицева матрица: её главная диагональ составлена из единиц, первая наддиагональ - из $(-1)r_1$, вторая - из

$(-1)^2 r_2$, третья - из $(-1)^3 r_3$ и т.д. Первая строка этой матрицы состоит из элементов $r_0^0 = 1$, $r_k^0 = (-1)^k r_k = \omega_k r_k$. Таким образом, R_{m+1}^0 можно записать в виде

$$R_{m+1}^0 = \left\| \begin{array}{cc} R_m^0 & J_m \vec{r}_m^0 \\ \vec{r}_m^{0T} J_m & 1 \end{array} \right\|, \quad R_m^0 = \Omega_m R_m \Omega_m, \quad \vec{r}_m^0 = \Omega_m \vec{r}_m.$$

Применительно к ней утверждение 2. дает $b_1^0 + \dots + b_m^0 \neq 1$ где $(b_1^0 + \dots + b_m^0)^T = \vec{b}^0 = (\Omega_m R_m \Omega_m)^{-1} = \Omega_m R_m^{-1} \vec{r}_m = \Omega_m \vec{b}_m$, так что $\omega_1 b_1 + \dots + \omega_m b_m \neq 1$. Последнее соотношение доказывает утверждение т.к. с учетом $\omega_k = (-1)^k$, $k = 1, \dots, m$ оно эквивалентно неравенству $(-1)^m \neq b_1(-1)^{m-1} + \dots + b_m$. **Утверждение доказано**

Утверждение 1.4. Если

$$R_{m+1} = \left\| \begin{array}{cc} R_m & J_m \vec{r}_m \\ \vec{r}_m^T J_m & 1 \end{array} \right\|,$$

- положительно определенная матрица, а $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$ - решение уравнения

$$R_m \vec{b} = \vec{r}_m,$$

то все корни алгебраического уравнения

$$\lambda^m = b_1 \lambda^{m-1} + \dots + b_m \lambda$$

по модулю меньше единицы.

Доказательство. Корни уравнения $\lambda^m = b_1 \lambda^{m-1} + \dots + b_m \lambda$ совпадают с собственными числами матрицы

$$\Phi_m = \left\| \begin{array}{cccccc} b_1 & b_2 & \dots & b_{m-1} & b_m \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{array} \right\|.$$

Рассмотрим выражение $C_m = R_m - \Phi_m R_m \Phi_m^T$. Перемножая и вычитая соответствующие матрицы, получаем

$$C_m = \begin{vmatrix} d^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad (1.46)$$

где $d^2 = 1 - r_m^T \vec{b}$, при этом $d^2 > 0$ в силу $\det(R_{m+1}) = \det(R_m) d_m^2 > 0$. Таким образом, матрица C_m - неотрицательно определенная, и в соответствии с утверждением 1.1. собственные числа матрицы Φ_m по модулю не больше единицы. По модулю равными единице они не могут быть согласно утверждениям 1.2. и 1.3. **Утверждение доказано**

Таким образом, доказано, что, полагая в (1.35) коэффициенты $b_1[m] = b_1, \dots, b_m[m] = b_m, d_m = d$, мы получаем процесс авторегрессии m -го порядка. Благодаря свойствам корней характеристического уравнения процесс, описываемый уравнением (1.35), при произвольных начальных значениях для t через достаточно большое число шагов перейдет в стационарный режим. Более экономичный способ численного моделирования реализаций авторегрессионного процесса состоит в том, что параллельно с решением системы (1.41) строятся специальные начальные значения по схеме (1.24)-(1.25), при которых он сразу будет обладать нужными корреляционными свойствами.

Глава 2

Численные модели стационарных векторных гауссовских последовательностей и однородных полей

В этой главе рассматриваются численные алгоритмы моделирования стационарно связанных гауссовских p -мерных векторов $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_n$, которую можно представить как вектор-столбец $\vec{\xi}_{(n)} = (\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_n)^T$ с заданной вещественной блочно-лицевой (или блочно-стационарной) ковариационной матрицей вида (1.2), рассмотренной в первом параграфе первой главы.

Схема моделирования основана на обобщении метода условных математических ожиданий на случай моделирования векторных гауссовских последовательностей. Алгоритмы для вычисления соответствующих матричных коэффициентов принципиально не от-

$$\begin{aligned}\vec{\xi}_{(k)} &= (\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_k)^T \\ \vec{B}[k] &= (B_1^T[k], \dots, B_k^T[k]), \quad k = 1, \dots, n-1,\end{aligned}$$

$B_i[k]$ – матрицы размера $p \times p$, а C_i – нижние треугольные матрицы размера $p \times p$.

Численная реализация схемы (2.3) требует вычисления на каждом шаге матрицы коэффициентов регрессии $\vec{B}[k]$ и остаточной ковариационной матрицы $Q_k = C_k C_k^T$. Одним из возможных методов вычисления матричных векторов $\vec{B}[k]$ для $k = 1, \dots, n-1$ является решение уравнений вида

$$\tilde{R}_{(k)} \vec{B}[k] = \vec{R}_k.$$

Методы решения систем $A\vec{x} = \vec{b}$ блочными теплицевыми матрицами в настоящее время достаточно хорошо развиты. Различные модификации этого метода приведены в книге [6]. В данной работе соответствующие алгоритмы используются при реализации метода "условных математических ожиданий" в виде (2.3) для моделирования последовательности векторов $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_n$. в котором необходимо вычислять матричные коэффициенты $\vec{B}[k]$ и Q_k на каждом шаге. При этом матрицы Q_k связаны с $R_{(k)}$ и $\vec{B}[k]$ следующим соотношением:

$$Q_k = R_0 - \vec{B}^T[k] \tilde{R}_{(k)} \vec{B}[k] \quad (2.4)$$

где $\tilde{R}_{(k)} = J_{(k)} R_{(k)} J_{(k)}$. Вычисления Q_k по формуле (2.4) достаточно трудоемки, поэтому рассматривается специальная рекуррентная процедура для вычисления матриц $\vec{B}[k]$ и Q_k .

Положим

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{(k)}^{-1} \vec{R}_k &= \vec{B}[k], & \tilde{R}_{(k+1)}^{-1} \vec{R}_{k+1} &= \vec{B}[k+1], \\ R_{(k)}^{-1} \vec{R}_k &= \vec{B}[k], & R_{(k+1)}^{-1} \vec{R}_{k+1} &= \vec{B}[k+1].\end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned}
\vec{B}[k] &= (B_1^T[k], \dots, B_k^T[k])^T, \quad \vec{B}[k+1] = (B_1^T[k+1], \dots, B_{k+1}^T[k+1])^T, \\
\vec{\tilde{B}}[k] &= (\tilde{B}_1^T[k], \dots, \tilde{B}_k^T[k])^T, \quad \vec{\tilde{B}}[k+1] = (\tilde{B}_1^T[k+1], \dots, \tilde{B}_{k+1}^T[k+1])^T, \\
\tilde{R}_{(k)} &= J_{(k)} R_{(k)} J_{(k)}, \quad \tilde{R}_{(k+1)} = J_{(k+1)} R_{(k+1)} J_{(k+1)}, \\
\vec{R}_k &= (R_1^T, \dots, R_k^T)^T, \quad \vec{R}_{k+1} = (R_1^T, \dots, R_{k+1}^T)^T, \\
\vec{\tilde{R}}_k &= (\tilde{R}_1^T, \dots, \tilde{R}_k^T)^T, \quad \vec{\tilde{R}}_{k+1} = (\tilde{R}_1^T, \dots, \tilde{R}_{k+1}^T)^T, \\
R_{(k+1)} &= \left\| \begin{array}{cc} R_{(k)} & J_{(k)} \vec{R}_k \\ \vec{\tilde{R}}_k^T J_{(k)} & R_0 \end{array} \right\|.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Из (2.5) с учетом свойств матрицы (2.2) следует, что

$$R_{(k)}^{-1} J_{(k)} \vec{R}_k = J_{(k)} \vec{B}[k], \quad \tilde{R}_{(k)}^{-1} J_{(k)} \vec{\tilde{R}}_k = J_{(k)} \vec{\tilde{B}}[k]. \tag{2.7}$$

Используя обозначения (2.6) и учитывая то, что матрица $R_{(k+1)}$ состоит из четырех блоков (которые, в свою очередь, сами являются блочными матрицами), представим матрицу $\tilde{R}_{(k+1)}$ в виде

$$R_{(k+1)}^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} A_{(k)} & \vec{x}_k \\ \vec{y}_{(k)}^T & z_0 \end{array} \right\|,$$

где $A_{(k)}$ - квадратная матрица, состоящая из $k \times k$ блоков $p \times p$, \vec{x} , \vec{y} - блочные векторы-столбцы, состоящие из $k \times 1$ таких же блоков, а z_0 - квадратная матрица $p \times p$. Из условия $R_{(k+1)} R_{(k+1)}^{-1} = I_{(k+1)}$, где $I_{(k+1)}$ - блочная единичная матрица, получим соответствующее блочное представление матрицы $R_{(k+1)}^{-1}$ (аналогично строим обратную матрицу для $\tilde{R}_{(k+1)}$). Таким образом,

$$\begin{aligned}
& R_{(k+1)}^{-1} = \\
= & \left\| \begin{array}{cc} R_{(k)}^{-1} + R_{(k)}^{-1} J_{(k)} \vec{R}_k Q_k^{-1} R_{(k)}^{-1} & - R_{(k)}^{-1} J_{(k)} \vec{R}_k Q_k^{-1} \\ - Q_k^{-1} \vec{R}_k^T J_{(k)} R_{(k)}^{-1} & Q_k^{-1} \end{array} \right\|, \\
& \vec{R}_{(k+1)}^{-1} = \\
= & \left\| \begin{array}{cc} \tilde{R}_{(k)}^{-1} + \tilde{R}_{(k)}^{-1} J_{(k)} \vec{\tilde{R}}_k Q_k^{-1} \tilde{R}_{(k)}^{-1} & - \tilde{R}_{(k)}^{-1} J_{(k)} \vec{\tilde{R}}_k \tilde{Q}_k^{-1} \\ - \tilde{Q}_k^{-1} \vec{\tilde{R}}_k^T J_{(k)} \tilde{R}_{(k)}^{-1} & \tilde{Q}_k^{-1} \end{array} \right\|,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где

$$\begin{aligned}
Q_k &= R_0 - \vec{R}_k^T \tilde{R}_{(k)}^{-1} \vec{R}_k, \\
\tilde{Q}_k &= R_0 - \vec{\tilde{R}}_k^T R_{(k)}^{-1} \vec{\tilde{R}}_k.
\end{aligned}$$

С учетом (2.7) и (2.8) выразим $\vec{B}[k+1]$ и Q_k через $\vec{B}[k]$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
B_1^T[1] &= R_1^T R_0^{-1}, \quad \tilde{B}_1^T[1] = R_1 R_0^{-1}, \\
Q_0 &= R_0, \quad \tilde{Q}_0 = \tilde{R}_0 = R_0, \\
(B_1^T[k+1], \dots, B_k^T[k+1]) &= \vec{B}^T[k] - B_{k+1}^T[k+1] \vec{B}^T[k] J_{(k)}, \\
(\tilde{B}_1^T[k+1], \dots, \tilde{B}_k^T[k+1]) &= \vec{\tilde{B}}^T[k] - \tilde{B}_{k+1}^T[k+1] \vec{\tilde{B}}^T[k] J_{(k)}, \\
B_{k+1}[k+1] &= \tilde{Q}_k^{-1} (R_{K+1} - \vec{R}_k^T J_{(k)} \vec{B}[k]), \\
\tilde{B}_{k+1}[k+1] &= Q_k^{-1} (R_{K+1} - \vec{R}_k^T J_{(k)} \vec{B}[k]), \\
Q_k &= R_0 - \vec{R}_k^T \vec{B}[k], \quad \tilde{Q}_k = \tilde{R}_0 - \vec{\tilde{R}}_k^T \vec{B}[k], \\
C_k C_k^T &= Q_k, \\
k &= 1, \dots, n-1.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Алгоритм (2.9) упрощается, если Q_k, \tilde{Q}_k и $B_{k+1}[k+1]$ вычислять по формулам

$$\begin{aligned}
Q_k &= Q_{k-1} - B_k^T[k] \tilde{Q}_{k-1} B_k[k], \\
\tilde{Q}_k &= \tilde{Q}_{k-1} - \tilde{B}_k^T[k] Q_{k-1} \tilde{B}_k[k], \\
\tilde{B}_{k+1}[k+1] &= Q_k^{-1} B_{k+1}^T[k+1] \tilde{Q}_k.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Рассмотрим некоторые свойства алгоритма (2.3), (2.9).

1. Поскольку $R_{(n)}$ - положительно-определенная матрица, то положительно-определенными являются и подматрицы

$$R_0, R_{(1)}, \dots, R_{(n-1)},$$

а также обратные к ним подматрицы

$$R_0^{-1}, R_{(1)}^{-1}, \dots, R_{(n-1)}^{-1}.$$

Тогда согласно (2.8) положительно-определенными будут матрицы Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1} . Что касается матрицы Q_n , то она положительно определена при дополнительном условии положительной определенности расширенной матрицы R_{n+1} . Аналогичными свойствами обладают матрицы $\tilde{R}_0, \tilde{R}_{(1)}, \dots, \tilde{R}_{(n-1)}$, $\tilde{R}_{(n)}$ и $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \dots, \tilde{Q}_{n-1}$, а также \tilde{Q}_n .

При этом справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
\det(R_{(n)}) &= \det(Q_1) \det(Q_2) \dots \det(Q_{n-1}) \\
\det(\tilde{R}_{(n)}) &= \det(\tilde{Q}_1) \det(\tilde{Q}_2) \dots \det(\tilde{Q}_{n-1}) ,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

причем

$$\begin{aligned}
\det(R_0) &= \det(Q_0) \geq \det(Q_2) \geq \dots \geq \det(Q_{n-1}) > 0, \\
\det(\tilde{R}_0) &= \det(\tilde{Q}_0) \geq \det(\tilde{Q}_2) \geq \dots \geq \det(\tilde{Q}_{n-1}) > 0.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Это нетрудно показать по индукции, используя положительную определенность матриц $R_0, R_{(1)}, \dots, R_{(n-1)}$ и соотношение

$$\det(R_{(n)}) = \det(R_{(n-1)}) \det(R_0 - \vec{R}_{n-1}^T R_{(n-1)}^{-1} \vec{R}_{n-1})$$

а также первые два соотношения из (2.10). Покажем это для первой цепочки неравенств из (2.12).

Пусть $S = Q_{k-1}^{-1/2} B_k^T [k] Q_{k-1}^{1/2}$ и, соответственно $B_k^T [k] = Q_{k-1}^{1/2} S Q_{k-1}^{-1/2}$. Используя эти соотношения запишем выражение $Q_k = Q_{k-1} - B_k^T [k] \tilde{Q}_{k-1} B_k [k]$ в тождественном виде

$$Q_k = B_k^T [k] = Q_{k-1}^{1/2} (I_{k-1} - S Q_{k-1}^{-1/2} \tilde{Q}_{k-1} Q_{k-1}^{-1/2} S^T) Q_{k-1}^{1/2}, \quad (2.13)$$

где I_{k-1} - единичная матрица. Матрицы Q_k и \tilde{Q}_{k-1} положительно определены, значит $A = I - S Q_{k-1}^{-1/2} \tilde{Q}_{k-1} Q_{k-1}^{-1/2} S^T$ положительно определена и ее собственные числа положительны ($\lambda(A) > 0$) а матрица $B = S Q_{k-1}^{-1/2} \tilde{Q}_{k-1} Q_{k-1}^{1/2} S^T$ - неотрицательно определена и

ее собственные числа неотрицательны ($\lambda(B) > 0$). Так как $\lambda(A) = 1 - \lambda(B)$ то

$$0 < \det(I_{k-1} - S Q_{k-1}^{-1/2} \tilde{Q}_{k-1} Q_{k-1}^{1/2} S^T) \leq 1.$$

Из (2.13) имеем

$$\det(Q_k) = \det(Q_{k-1}) \det(I_{k-1} - S Q_{k-1}^{-1/2} \tilde{Q}_{k-1} Q_{k-1}^{1/2} S^T),$$

и, следовательно

$$\det(Q_k) \geq \det(Q_{k-1})$$

Очевидно, соотношения (2.11), (2.12) имеют место также и для матрицы $\tilde{R}_{(n)}$.

2. Из (2.10) и утверждения 1.1. из первой главы следует, что собственные числа матриц

$$B_k^* = \left\| \begin{array}{cc} 0 & B_k[k] \\ \tilde{B}_k[k] & 0 \end{array} \right\|$$

по модулю меньше единицы. Действительно, пусть

$$C_k^* = \left\| \begin{array}{cc} Q_k & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_k \end{array} \right\|, C_{k-1}^* = \left\| \begin{array}{cc} Q_{k-1} & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_{k-1} \end{array} \right\|.$$

Из (2.10) следует

$$C_k^* = C_{k-1}^* - B_k^* C_k^* B_k^{*T}.$$

Согласно Утверждению 1.1. из первой главы с учетом того, что Q_k и \tilde{Q}_k положительно определены, следует, что собственные значения $\lambda(B_k^*)$, $k = 1, \dots, m$ удовлетворяют условию

$$|\lambda(B_k^*)| < 1.$$

3. Представим (2.3) в виде

$$B_{(n)} \vec{\xi}_{(n)} = C_{(n)} \vec{\varphi}_{(n)}, \quad (2.14)$$

где

$$C_{(n)} = \left\| \begin{array}{cccc} C_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & C_{n-1} \end{array} \right\|, \quad (2.15)$$

$$B_{(n)} = \left\| \begin{array}{cccc} I_p & 0 & \cdots & 0 \\ -\vec{B}^T[1]J_{(1)} & I_p & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\vec{B}^T[n-1]J_{(n-1)} & & & I_p \end{array} \right\|,$$

$$\vec{\xi}_{(n)} = (\xi_1^T, \dots, \xi_n^T)^T, \text{ а } \vec{\varphi}_{(n)} = (\varphi_1^T, \dots, \varphi_n^T)^T$$

- гауссовский вектор с блочной корреляционной матрицей $I_{(n)}$ вида

$$I_{(n)} = \left\| \begin{array}{cccc} I_p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_p & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & I_p \end{array} \right\|. \quad (2.16)$$

Матрица $B_{(n)}$ не вырождена, поэтому

$$\vec{\xi}_{(n)} = B_{(n)}^{-1} C_{(n)} \vec{\varphi}_{(n)}. \quad (2.17)$$

Если $\vec{B}^T[n-1]$ - решение системы уравнений (2.5), то

$$\begin{aligned} M \vec{\xi}_{(n)} \vec{\xi}_{(n)}^T &= B_{(n)}^{-1} C_{(n)} M \vec{\varphi}_{(n)} \vec{\varphi}_{(n)}^T C_{(n)}^T (B_{(n)}^T)^{-1} = \\ &= B_{(n)}^{-1} C_{(n)} C_{(n)}^T (B_{(n)}^{-1})^T = (B_{(n)}^T (C_{(n)}^{-1})^T C_{(n)}^{-1} B_{(n)})^{-1} = \\ &= (R_{(n)}^{-1})^{-1} = R_{(n)}. \end{aligned}$$

Положим

$$T_{(n)} = B_{(n)}^{-1} C_{(n)},$$

тогда разложению матрицы $R_{(n)}$ на произведение нижней и верхней треугольных матриц

$$R_{(n)} = B_{(n)}^{-1} C_{(n)} C_{(n)}^T (B_{(n)}^{-1})^T = T_{(n)} T_{(n)}^T. \quad (2.18)$$

соответствует разложению обратной матрицы к $R_{(n)}$ на произведение верхней и нижней треугольных матриц

$$R_{(n)}^{-1} = B_{(n)}^T (C_{(n)}^{-1})^T C_{(n)}^{-1} B_{(n)} = (T_{(n)}^{-1})^T T_{(n)}^{-1}. \quad (2.19)$$

Матрицы $\vec{B}[k]$ и \vec{Q}_k в алгоритме (2.9) для схемы (2.3) играют вспомогательную роль для вычисления матриц $\vec{B}[k]$ и Q_k . Тем не менее они могут быть использованы, если требуется моделировать вектор $\vec{\xi}_0$, при условии, что смоделирована последовательность векторов $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_k$.

Действительно, пусть $\vec{\xi}_{(k)} = (\vec{\xi}_1^T, \dots, \vec{\xi}_k^T)^T$ - гауссовская последовательность с блочной ковариационной матрицей $R_{(k)}$. Смоделируем вектор $\vec{\xi}_0$ такой, чтобы последовательность $(\vec{\xi}_0^T, \vec{\xi}_1^T, \dots, \vec{\xi}_k^T)^T$ имела ковариационную матрицу $R_{(k+1)}$. Рассмотрим преобразование

$$\vec{\xi}_0 = (\vec{B}_1^T[1], \dots, \vec{B}_k^T[k])^T \vec{\xi}_{(k)} + \vec{C}_k \vec{\varphi}_0, \quad (2.20)$$

где \vec{C}_k такая, что $\vec{C}_k \vec{C}_k^T = \vec{Q}_k$, а $\vec{\varphi}_0$ - гауссовский вектор с независимыми компонентами и не зависящий от $\vec{\xi}_{(k)}$. Умножая (2.20) справа на $\vec{\xi}_{(k)}^T$ и учитывая, что $M_{\vec{\xi}_0 \vec{\xi}_{(k)}} = (R_1, \dots, R_k)$, имеем

$$R_{(k)} \vec{B}[k] = \vec{R}_k,$$

что соответствует второму уравнению в (2.5). Умножая (2.17) справа на $\vec{\xi}_0^T$ и потребовав, чтобы $M_{\vec{\xi}_0 \vec{\xi}_0} = R_0$, получим

$$\vec{Q}_k = R_0 - \vec{R}_k^T \vec{B}[k] \quad (2.21)$$

В дальнейшем это свойство, а также свойства, рассмотренные выше, будут использованы для построения векторных процессов авторегрессии с заданными ковариационными матрицами, а также для моделирования гауссовских полей на регулярной сетке на плоскости.

Для реализации алгоритма необходимо хранить в памяти ЭВМ блочные строки матрицы $R_{(n)}$ и $\vec{R}_{(n)}$, матрицы $\vec{B}[k]$ и $\vec{B}[k]$ максимальное число блоков в которых равно $n - 1$, а также

еще один такой же массив с результатами промежуточных вычислений. Длина n моделируемого ряда при фиксированном объеме $M = 2p^2(2n + 1)$ занимаемой памяти ЭВМ зависит от размерности p блоков и равна $(M - 2p^2)/4p^2$. При уменьшении p , естественно,

длина моделируемого ряда может быть увеличена. Если $p = 1$, то $\vec{\xi}_{(n)}$ является последовательностью из n скалярных величин, и в этом случае алгоритм наиболее экономичен.

Если требуется получить ансамбль реализаций, то его следует создавать путем накопления реализаций вектора $\vec{\xi}_k$ на каждом шаге по k .

2.1.1 Некоторые приемы регуляризация алгоритма

Численные эксперименты, проведенные для большого набора различных матриц вида (2.1) показали, что в ряде случаев алгоритм моделирования вычислительно неустойчив. Неустойчивость проявляется в том, что на некотором шаге матрица Q_k перестает быть положительно определенной и тем самым результат моделирования теряет смысл. По аналогии со скалярным случаем в таких ситуациях вместо $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_n$ можно ограничиться моделированием векторного ряда $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_n$ с совместной ковариационной матрицей, которая связана с $R_{(n)}$ соотношением

$$G_{(n)} = \varepsilon I_{(n)} + (1 - \varepsilon)R_{(n)}$$

где ε - подходящее число из интервала $(0,1)$, а $I_{(n)}$ блочная единичная матрица. Это, как и в скалярном случае объясняется тем, что наименьшее собственное число матрицы $G_{(n)}$ превосходит ε безотносительно к размерам $G_{(n)}$. Эксперименты показывают, что во многих случаях устойчивость обеспечивается даже при достаточно небольших значениях (порядка $10^{-3} - 10^{-4}$).

Ниже будет рассмотрен более точный способ регуляризации, являющийся обобщением сдвоенного алгоритма из первой главы для случая блочно-теплицевых матриц.

Как и для скалярного случая введем обозначения

$$\begin{aligned}\vec{\beta}[k] &= (\beta_1^T[k], \dots, \beta_k^T[k])^T, \quad \vec{\tilde{\beta}}[k] = (\tilde{\beta}_1^T[k], \dots, \tilde{\beta}_k^T[k])^T, \\ \vec{G}_k &= (G_1^T, \dots, G_k^T)^T, \quad \vec{\tilde{G}}_k = (G_1, \dots, G_k)^T,\end{aligned}$$

где $\vec{\beta}[k]$ и $\vec{\tilde{\beta}}[k]$ - решения уравнений

$$\tilde{G}_{(k)}^{-1} \vec{G}_k = \vec{\beta}[k], \quad G_{(k)}^{-1} \vec{\tilde{G}}_k = \vec{\tilde{\beta}}[k],$$

а матрица q_k связана с $G_{(k)}$ и $\vec{\beta}[k]$ соотношением:

$$q_k = G_0 - \vec{\beta}^T[k] \tilde{G}_{(k)} \vec{\beta}[k],$$

где $\tilde{G}_{(k)} = J_{(k)} G_{(k)} J_{(k)}$.

Перепишем выражение для вычисления матрицы $B_{k+1}[k+1]$ в алгоритме (2.9)

$$\begin{aligned}B_{k+1}[k+1] &= \tilde{Q}_k^{-1} (R_{K+1} - \vec{\tilde{R}}_k^T J_{(k)} \vec{B}[k]), \\ \tilde{B}_{k+1}[k+1] &= Q_k^{-1} (R_{K+1} - \vec{R}_k^T J_{(k)} \vec{B}[k])\end{aligned}$$

в виде

$$B_{k+1}[k+1] = V_k^{-1} W_k, \quad (2.22)$$

где

$$\begin{aligned} W_k &= R_{K+1} - \vec{R}_k^T J_{(k)} \vec{B}[k], \\ V_k &= R_0 - \vec{R}_k^T \vec{B}[k]. \end{aligned}$$

Точность результатов можно повысить, если путем тождественных преобразований избавиться от обращения плохо обусловленной матрицы. Матрица $G_{(n)}$ при малых ε близка к $R_{(n)}$, следовательно, и матрицы

$$\begin{aligned} \tilde{W}_k &= G_{K+1} - \vec{G}_k^T J_{(k)} \vec{\beta}[k], \\ \tilde{V}_k &= G_0 - \vec{G}_k^T \vec{\beta}[k]. \end{aligned}$$

будут близки к матрицам W_k и V_k . Чем меньше ε , тем ближе $\tilde{W}_k \tilde{W}_k^{-1}$ и $\tilde{V}_k \tilde{V}_k^{-1}$ к единичной матрице. Запишем (2.25) в виде

$$B_{k+1}[k+1] = V_k^{-1} (\tilde{V}_k \tilde{V}_k^{-1}) (\tilde{W}_k \tilde{W}_k^{-1}) W_k = (\tilde{V}_k^{-1} V_k)^{-1} \beta_{k+1}[k+1] (W_k^{-1} W_k).$$

Здесь $\beta_{k+1}[k+1]$ вычисляются устойчиво по условию выбора, а справа и слева стоят матрицы, близкие к единичной. Остается упростить это выражение, не потеряв его преимущества перед выражением (2.22).

В результате получим

$$\begin{aligned} B_{k+1}[k+1] &= \left[I_k - (1 - \varepsilon) \tilde{q}_k^{-1} \vec{R}_k^T (\vec{B}[k] - \vec{\beta}[k]) - \varepsilon \tilde{q}_k^{-1} \right]^{-1} \beta_{k+1}[k+1] \times \\ &\times \left[I_k - (1 - \varepsilon) \beta_{k+1}[k+1]^{-1} \tilde{q}_k^{-1} \vec{R}_k^T J_{(k)} (\vec{B}[k] - \vec{\beta}[k]) \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Теперь вычисление $B[k]$ и Q осуществляются с помощью следующего сдвоенного алгоритма

$$\begin{aligned}
\beta_1^T[1] &= G_1^T G_0^{-1}, & \tilde{\beta}_1^T[1] &= G_1 G_0^{-1}, \\
B_1^T[1] &= R_1^T R_0^{-1}, & \tilde{B}_1^T[1] &= R_1 R_0^{-1}, \\
q_0 &= G_0, & q_0 &= \tilde{G}_0 = G_0, \\
Q_0 &= R_0, & Q_0 &= \tilde{R}_0 = R_0, \\
(\beta_1^T[k+1], \dots, \beta_k^T[k+1]) &= \vec{\beta}^T[k] - \beta_{k+1}^T[k+1] \vec{\beta}^T[k] J_{(k)}, \\
(B_1^T[k+1], \dots, B_k^T[k+1]) &= \vec{B}^T[k] - B_{k+1}^T[k+1] \vec{B}^T[k] J_{(k)}, \\
(\tilde{\beta}_1^T[k+1], \dots, \tilde{\beta}_k^T[k+1]) &= \vec{\beta}^T[k] - \tilde{\beta}_{k+1}^T[k+1] \vec{\beta}^T[k] J_{(k)},
\end{aligned} \tag{l}$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{B}_1^T[k+1], \dots, \tilde{B}_k^T[k+1]) &= \vec{B}^T[k] - \tilde{B}_{k+1}^T[k+1] \vec{B}^T[k] J_{(k)}, \\
\beta_{k+1}[k+1] &= \tilde{q}_k^{-1} (G_{K+1} - \tilde{G}_k^T J_{(k)} \vec{\beta}[k]), \\
B_{k+1}[k+1] &= \left[I_k - (1 - \varepsilon) \tilde{q}_k^{-1} \tilde{R}_k^T (\vec{B}[k] - \vec{\beta}[k]) - \varepsilon \tilde{q}_k^{-1} \right]^{-1} \beta_{k+1}[k+1] \times \\
&\times \left[[I_k - (1 - \varepsilon) \beta_{k+1}[k+1]]^{-1} q_k^{-1} \tilde{R}_k^T J_{(k)} (\vec{B}[k] - \vec{\beta}[k]) \right]. \\
\tilde{\beta}_{k+1}[k+1] &= q_k^{-1} (G_k^T - \tilde{G}_k^T J_{(k)} \vec{\beta}[k]), \\
\tilde{B}_{k+1}[k+1] &= \left[I_k - (1 - \varepsilon) \tilde{q}_k^{-1} \tilde{R}_k^T (\vec{B}[k] - \vec{\beta}[k]) - \varepsilon \tilde{q}_k^{-1} \right]^{-1} \beta_{k+1}[k+1] \times \\
&\times \left[[I_k - (1 - \varepsilon) \beta_{k+1}[k+1]]^{-1} q_k^{-1} \tilde{R}_k^T J_{(k)} (\vec{B}[k] - \vec{\beta}[k]) \right]. \\
q_k &= G_0 - \tilde{G}_k^T \vec{B}[k], & \tilde{q}_k &= \tilde{G}_0 - \tilde{G}_k^T \vec{\beta}[k], \\
Q_k &= R_0 - \tilde{R}_k^T \vec{B}[k], & \tilde{Q}_k &= \tilde{R}_0 - \tilde{R}_k^T \vec{\beta}[k], \\
C_k C_k^T &= Q_k, \\
k &= 1, \dots, n-1.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

В алгоритме (2.24) обращаются только матрицы q_k и \tilde{q}_k , соответствующие ковариационной матрице $G_{(n)}$. Во многих случаях, когда алгоритм (2.9) неустойчив, в вдвоенном алгоритме вычисления происходят без накопления ошибки. Например, если элементы корреляционной матрицы $R_{(n)}$ вычисляются по формулам

$$r(i, j, k) = \exp(-\alpha(k-1)^2) \exp(-\beta|i-j|)$$

где $r(i, j, k)$ - элементы матрицы $R_{(n)}$, то при $\alpha = 0.001$, $\beta = 1.1$ алгоритм проявляет неустойчивость на первых шагах. Использование матрицы $G_{(n)}$ вместо $R_{(n)}$ при минимальном $\varepsilon = 10^{-5}$ обеспечивает устойчивую работу алгоритма. При $\varepsilon = 10^{-4}$ вдвоенный алгоритм для матрицы $R_{(n)}$ также неустойчив. Но если вместо $G_{(n)}$ взять матрицу $G_{(n)}^* = \varepsilon I_{(n)} + (1 - \varepsilon_1)G_{(n)}$ при $\varepsilon_1 = 10^{-6}$, то для этой матрицы вдвоенный алгоритм при $\varepsilon = 10^{-4}$ работает без накопления ошибок.

Аналогично при $\alpha = 0.0001$ вдвоенный алгоритм для матрицы $G_{(n)}^*$ проявляет устойчивость при $\varepsilon = 11 \times 10^{-5}$ и $\varepsilon_1 = 6 \times 10^{-5}$, в то время, когда исходный алгоритм для матрицы $G_{(n)}^*$ не работает, а начинает работать только при $\varepsilon_1 = 10^{-5}$. Проведены также численные эксперименты для других плохо обусловленных матриц.

2.2 Алгоритмы моделирования однородных и однородных изотропных гауссовских полей на регулярных сетках с блочно-тёплицевыми ковариационными матрицами

Векторная последовательность $\vec{\xi}_{(n)} = (\xi_1^T, \dots, \xi_n^T)^T$ может быть интерпретирована как дискретное гауссовское поле на регулярной сетке. Пусть i, j - целочисленные координаты узлов сетки, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$, тогда j -тая компонента вектора последовательности $\vec{\xi}_{(n)}$ является значением поля в узле с координатами i, j . Если поле однородно, то корреляции между значениями поля в двух узлах сетки удовлетворяют соотношению

$$r_{i,j;i_1,j_1} = r_{i+k,j+l;i_1+k,j_1+l}, \quad (2.25)$$

так как не зависят от параллельного сдвига узлов сетки. Ковариационная матрица $R_{(n)}$ поля $\vec{\xi}_{(n)}$ в этом случае имеет блочную структуру вида (2.1), а ее блоки R_k являются несимметричными матрицами $p \times p$ теплицева типа .

$$R_k = \left\| \begin{array}{cccc} r_0^k & r_0^k & \cdots & r_{p-1}^k \\ r_{-1}^k & r_0^k & \cdots & r_{p-2}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{-(p-1)}^k & r_{-(p-2)}^k & \cdots & r_0^k \end{array} \right\|, \quad (2.26)$$

Блочную теплицеву матрицу $R_{(n)}$ (2.1) с блоками вида (2.26) называют дважды теплицевой матрицей [17]. Рассмотрим блочную матрицу перестановок вида

$$\gamma_{(n)} = \left\| \begin{array}{cccc} J_p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_p & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & J_p \end{array} \right\|,$$

и выпишем основные свойства этой матрицы:

$$\begin{aligned} \gamma_{(n)}\gamma_{(n)} &= I_{(n)}, & \gamma_{(n)}^{-1} &= \gamma_{(n)}, \\ \gamma_{(n)}J_{(n)} &= J_{np}, & J_{(n)}\gamma_{(n)} &= J_{np}, \end{aligned}$$

где J_{np} - матрица перестановок вида (1.2.11) размерности $np \times np$.

Для дважды теплицевой ковариационной матрицы $R_{(n)}$ имеет место следующее соотношение:

$$J_{(n)}R_{(n)}J_{(n)} = \gamma_{(n)}R_{(n)}\gamma_{(n)} = \tilde{R}_{(n)}.$$

Это нетрудно проверить непосредственным перемножением соответствующих матриц. Рассмотрим теперь следующие уравнения из (2.5)

$$\tilde{R}_{(k)}\vec{B}[k] = \vec{R}_k, \quad R_{(k)}\vec{\tilde{B}}[k] = \vec{\tilde{R}}_k.$$

Запишем второе уравнение в тождественном виде

$$\gamma_{(k)}R_{(k)}\gamma_{(k)}\gamma_{(k)}\vec{\tilde{B}}[k]J_{kp} = \vec{\tilde{R}}_kJ_{kp}.$$

Очевидно, для однородного поля $\gamma_{(k)}\vec{\tilde{B}}[k]J_{kp} = \vec{\tilde{R}}_k$. Тогда из соотношений (2.1) и невырожденности матрицы $R_{(n)}$ имеем

$$\vec{\tilde{B}}[k] = \gamma_{(k)}\vec{B}[k]J_{kp}.$$

В результате алгоритм для вычисления матричных коэффициентов $B_i^T[k]$ и матрицы Q_k принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} B_1^T[1] &= R_1^T R_0, \\ Q_0 &= R_0, \quad C_0 C_0^T = Q_0, \\ (B_1^T[k+1], \dots, B_k^T[k+1]) &= \vec{B}^T[k] - B_{k+1}^T[k+1]J_p\vec{B}^T[k]J_{kp}, \\ B_{k+1}[k+1] &= J_p Q_k^{-1} J_p (R_{k+1} - J_p \vec{R}_k^T J_{kp} \vec{B}[k]), \\ Q_k &= Q_{k-1} - B_k^T[k] J_p Q_{k-1} J_p \vec{B}[k], \\ C_k C_k^T &= Q_k^T, \\ k &= 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Отметим, что для получения этого алгоритма использовалась только симметричность теплицевой матрицы R_k вдоль побочной диагонали. Дальнейшее упрощение алгоритма возможно, если использовать другие свойства теплицевой матрицы, например, симметричность вдоль главных и побочных диагоналей матриц R_k . Если матрицы с не являются теплицевыми, но симметричны, то фор-

мулы (2.9) принимают вид

$$\begin{aligned}
\vec{B}^T[1] &= B_1^T[1] = R_1^T R_0^{-1}, \\
Q_0 &= R_0, \quad C_0 C_0^T = Q_0, \\
(B_1^T[k+1], \dots, B_k^T[k+1]) &= \vec{B}^T[k] - B_{k+1}^T[k+1] \vec{B}^T[k] J_{(k)}, \\
B_{k+1}[k+1] &= Q_k^{-1} (R_{K+1} - \vec{R}_k^T J_{(k)} \vec{B}[k]), \\
Q_k &= Q_{k-1} - B_k^T[k] Q_{k-1} \vec{B}[k], \\
C_k C_k^T &= Q_k^T, \\
k &= 1, \dots, n-1.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Ограниченность оперативной памяти ЭВМ создает определенные трудности при моделировании векторных рядов большой размерности и длины. Если требуется моделировать изотропные поля (в этом случае матрицы R_k симметричны и их элементы вычисляются с учетом того, что корреляции между ξ_{ik} и ξ_{jl} зависят лишь от $\rho = [(i-j)^2 + (k-l)^2]^{1/2}$), то иногда можно ограничиться построением таких полей, корреляции в которых зависят от ρ только при $\rho \leq \rho_0$, а при $\rho > \rho_0$ удовлетворяют более общему требованию, обеспечивающему теплицев характер матриц $R_{(n)}$.

2.3 Моделирование стационарных гауссовских векторных авторегрессионных процессов

Рассмотрим конечно-разностное уравнение

$$\vec{\xi}_t = B_1^T[m] \vec{\xi}_{t-1} + \dots + B_m^T[m] \vec{\xi}_{t-m} + \vec{u}_t, \tag{2.28}$$

где \vec{u}_t - последовательность взаимно независимых p -мерных векторов таких, что

$$M \vec{u}_t \vec{u}_t^T = Q_m,$$

а $B_1^T[m], \dots, B_m^T[m]$ - блочные матрицы размерности $p \times p$.

Перепишем (2.28) в форме

$$\vec{\xi}(t) = \Phi_{(m)} \vec{\xi}(t-1) + \vec{u}(t), \quad (2.29)$$

где

$$\vec{\xi}(t) = (\xi_t^T, \dots, \xi_{t-p}^T)^T, \quad \vec{u}(t) = (u_t^T, 0^T, \dots, 0^T)^T,$$

а $\Phi_{(m)}$ - блочная матрица вида (блочная матрица Фробениуса)

$$\Phi_{(m)} = \left\| \begin{array}{cccccc} B_1^T[m] & B_2^T[m] & \cdots & B_{m-1}^T[m] & B_m^T[m] & \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 & \end{array} \right\|$$

Пусть матрицы $B_1^T[m], \dots, B_m^T[m]$ в (2.28) заданы. Если собственные числа λ_k , $k = 1, \dots, mp$ по модулю меньше единицы, то уравнение (2.29) имеет единственное стационарное решение в форме сходящегося в среднеквадратическом смысле векторного процесса скользящего среднего [16,17]

$$\vec{\xi}(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \Phi_{(m)}^{\tau} \vec{u}_{t-k}. \quad (2.30)$$

Заметим, что блочная ковариационная функция процесса (2.28) единственным образом определяется матрицами $B_1^T[m], \dots, B_m^T[m]$ и Q_m на основе матричного уравнения Юла - Уолкера. Как и в скалярном случае предполагается, что для моделирования процесса (2.28) заданы не матрицы $B_1^T[m], \dots, B_m^T[m]$ а значения ковариационной функции R_0, R_1, \dots, R_m или первая строка теплицевой ковариационной матрицы $R_{(m)}$ (здесь R_k - матрицы $p \times p$). Необходимо найти матричные коэффициенты $B_1^T[m], \dots, B_m^T[m]$ и остаточную ковариационную матрицу Q_n для уравнения (2.28).

Для случая, когда блоки R_k матрицы $R_{(m)}$ - симметричны, по аналогии со скалярным случаем доказывается [5] следующее

Утверждение 2.1. Если $R_{(m)}$ - положительно определенная матрица с симметричными блоками R_k , а $\vec{B}[m]$ - решение уравнения

$$R_{(m)}\vec{B}[m] = \vec{R}_m$$

то $|\lambda(\Phi_{(m)})| < 1$.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству утверждения 1.4., в нем используются утверждение 1.1, соотношения (2.9), известное тождество

$$\det(\Phi_{(m)} - \lambda I_{(m)}) = \det(I_p \lambda^m - B_1^T[m] \lambda^{m-1} - \dots - B_m^T[m]), \quad (2.31)$$

а также следующее утверждение

Утверждение 2.2. Если $R_{(m+1)}$ - положительно определенная матрица с симметричными блоками R_k , а $\vec{B}[m]$ - решение системы уравнений

$$R_{(m)}\vec{B}[m] = \vec{R}_m$$

то $+1$ не может быть собственным числом матрицы $\Phi_{(m)}$.

Доказательство. Из условия положительной определенности $R_{(m)}$ следует, что $R_0^{-1}, R_{(1)}^{-1}, \dots, R_{(m-1)}^{-1}$ - положительно определенные матрицы. Тогда матрицы Q_1, \dots, Q_{m-1} положительно определены. Матрица Q_m также положительно определена. Это следует из того, что $R_{(m+1)}$ - положительно определенная матрица по условию.

Из соотношения (2.10) и симметричности блоков матрицы $R_{(m+1)}$ следует

$$Q_k = Q_{k-1} - B_k[k] Q_{k-1} B_k^T[k],$$

а из утверждения 1.1. с учетом того, что Q_k положительно определенная матрица, следует, что собственные значения $\lambda(B_k[k])$, $k = 1, \dots, m$ удовлетворяют условию

$$|\lambda(B_k[k])| < 1.$$

Рассмотрим суммы

$$S_k^T = B_1^T[k] + \dots + B_k^T[k], \quad S_{k-1}^T = B_1^T[k-1] + \dots + B_{k-1}^T[k-1].$$

С использованием (2.30) нетрудно показать, что

$$S_k^T = S_{k-1}^T(I - B_k^T[k]).$$

Тогда

$$\det(S_k^T) = \det(S_{k-1}^T) \det(I - B_k^T[k]).$$

Используя тождество (2.31) и условие $|\lambda(B_k^T[k])| < 1$ по индукции можно показать что $+1$ не может быть собственным числом матрицы $\Phi_{(m)}$. **Утверждение доказано**

По аналогии с доказательством **утверждения 2.2.** и с учетом специфики матричных умножений показывается, что -1 также не может быть собственным числом матрицы $\Phi_{(m)}$. Таким образом, процесс, определенный стохастическим разностным уравнением (2.28) с $B_1^T[m], \dots, B_m^T[m]$, полученными решением системы уравнений $R_{(m)}\vec{B}[m] = \vec{R}_m$ при условии, что матрица $\hat{R}_{(m+1)}$ положительно определена, является стационарным векторным авторегрессионным процессом.

Блочная корреляционная функция R_h процесса для $h = 0, 1, \dots, m$ совпадает с первой блочной строкой матрицы $R_{(m+1)}$. Блоки корреляционной функции R_h для $h = m+1, m+2, \dots$ определяются уравнением

$$R_h = \sum_{k=1}^m B_k^T[k] R_{h-k}.$$

Начальные векторы $\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_m$ процесса $\vec{\xi}_t$ вычисляются в соответствии с процедурой (2.3) (2.9).

Наряду с авторегрессионными моделями для численного построения гауссовских процессов и полей дискретного аргумента часто используются модели скользящего среднего [44]. Значения корреляционной функции r_h процесса скользящего среднего q -го порядка при $|h| > q$ равны нулю. Это накладывает определённые ограничения на ее значения при $|h| \leq q$. Например, легко показать, что для процесса скользящего среднего первого порядка ($q = 1$) коэффициент корреляции по абсолютной величине не превосходит значение 0.5, т.е. ($|r_h| \leq 0.5$), в то время как для произвольной корреляционной функции $|r_h| \leq 1$. При увеличении порядка модели эти ограничения ослабевают, и модель скользящего среднего позволяет описывать широкий класс реальных процессов.

2.4 Использование алгоритмов моделирования стационарных векторных процессов для моделирования периодически коррелированных процессов дискретного аргумента

Рассмотренные выше модели основаны на стационарном приближении, в соответствии с которым корреляции при фиксированном временном сдвиге не зависят от времени. Такое приближение оправдано в тех случаях, когда комплекс условий, определяющих характер процесса мало меняется во времени. Если рассматривать процессы на временных интервалах, в которых эти изменения велики, необходимо использовать более сложные модели, учитывающие зависимость параметров распределения от времени. Когда эта зависимость имеет периодический характер (например, суточный или годовой ход), целесообразно применять модели, которые учитывают эту особенность процесса. К таким моделям относятся модели периодически коррелированных случайных процессов (ПКСП), предложенные в работе [13] и получившие широкое распространение при описании реальных

процессов.

В монографии [34] предложен подход к моделированию периодически коррелированных случайных процессов на основе многомерного процесса авторегрессии-скользящего среднего, в соответствии с которым дискретный ПКСП с периодом коррелированности может быть представлен последовательностью p -мерных случайных векторов, компоненты которых стационарно связаны. Этот подход был использован для исследования сезонной и межгодовой изменчивости средних месячных значений высот волн в работе [3] и реализован в виде векторной модели авторегрессии первого порядка вида

$$\vec{\xi}_t = B\vec{\xi}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = \dots, -1, 0, 1, \dots,$$

где B - диагональная матрица размерности m , $\vec{\varepsilon}_t$ - независимый от $\vec{\xi}_t$ вектор с ковариационной матрицей D , m - месяцы, t - годы. Матрицы B и D определяют корреляционную связь волн в одноименные месяцы смежных лет и в различные месяцы года.

В данном разделе рассматривается использование алгоритмов (2.3), (2.9), а также авторегрессионной модели (2.28) для построения векторных процессов.

Рассмотрим периодически коррелированный случайный процесс дискретного аргумента на ограниченном интервале в равноотстоящие моменты времени t_1, \dots, t_N , $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, с периодом $T = p\Delta t$, где p такое, что $T \leq t_N$. Этот процесс (или последовательность) можно представить в виде вектора

$$\vec{\xi} = (\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_N))^T. \quad (2.32)$$

Его математическое ожидание $E\xi(t_i)$, дисперсия $D\xi(t_i)$ и корреляционная функция

$$R_\xi(t_i, t_j) = \frac{E\xi(t_i)\xi(t_j) - E\xi(t_i)E\xi(t_j)}{\sqrt{D\xi(t_i)}\sqrt{D\xi(t_j)}}$$

удовлетворяют следующим соотношениям [22]:

$$E\xi(t_i + T) = E\xi(t_i), \quad (2.33)$$

$$D\xi(t_i + T) = D\xi(t_i), \quad (2.34)$$

$$R_\xi(t_i + T, t_j + T) = R_\xi(t_i, t_j). \quad (2.35)$$

В дальнейшем для простоты мы будем рассматривать случай, когда $t_1 = 0$, а $\Delta t = 1$.

Способ моделирования гауссовских последовательностей, удовлетворяющих этим условиям, основан на моделировании стационарно связанных гауссовских p -мерных векторов $\vec{\xi}_i = (\xi_{1i}, \xi_{2i}, \dots, \xi_{pi})^T$. Совокупность этих векторов при $i = 1, \dots, n$ можно представить в виде вектора

$$\vec{\xi}_{(n)} = (\vec{\xi}_1^T, \vec{\xi}_2^T, \dots, \vec{\xi}_n^T)^T \quad (2.36)$$

с нулевым средним и заданной вещественной ковариационной матрицей блочно-теплицева вида

$$R_{(n)} = \begin{pmatrix} R_0 & R_1 & \dots & R_{n-1} \\ R_1^T & R_0 & \dots & R_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n-1}^T & R_{n-2}^T & \dots & R_0 \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

где R_k , $k = 0, \dots, n-1$ - матрицы $p \times p$. Вещественная положительно определенная матрица $R_{(n)}$ симметрична, но ее блоки могут быть несимметричными. Без нарушения общности мы можем рассматривать нормированную ковариационную матрицу $R_{(n)}$. Ковариационная матрица получается после умножения каждого компонента вектора (2.5) на соответствующее стандартное отклонение.

Представим вектор (2.36) в виде

$$\vec{\xi}_{(n)} = (\xi_{11}, \xi_{21}, \dots, \xi_{p1}, \xi_{12}, \xi_{22}, \dots, \xi_{p2}, \dots, \xi_{1n}, \xi_{2n}, \dots, \xi_{pn})^T. \quad (2.38)$$

Последовательность компонент данного вектора является периодически коррелированной последовательностью. Условия (2.33), (2.34) обеспечиваются умножением каждого элемента последовательности (2.38) на элементы не случайной периодической последовательности соответствующих стандартных отклонений с периодом $T = p$ и прибавлением к последовательности (2.38) не случайной периодической последовательности соответствующих средних с тем же периодом. Для того чтобы показать выполнение условия (2.35), перенумеруем компоненты вектора (2.38) последовательно от 1 до np . В этой нумерации перепишем данный вектор следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{\xi}_{(n)} &= \\ &= (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p, \xi_{p+1}, \xi_{p+2}, \dots, \xi_{2p}, \dots, \xi_{(n-1)p+1}, \xi_{(n-1)p+2}, \dots, \xi_{np})^T. \end{aligned}$$

Каждая компонента этого вектора представима в виде ξ_{kp+l} , $k = 0, \dots, n-1$, $l = 1, \dots, p$, где $k+1$ - номер подвектора в векторе (2.38), а l - номер компоненты в этом подвекторе. Тогда

$$E\xi_{kp+l+p}\xi_{k'p+l'+p} = E\xi_{(k+1)p+l}\xi_{(k'+1)p+l'} = E\xi_{kp+l}\xi_{k'p+l'}.$$

Последнее равенство в этом выражении обеспечивается блочно-теплицевой структурой матрицы (2.37). Из этого очевидным образом следует выполнение равенства (2.35).

Отметим, что специфика периодической коррелированности последовательности (2.38) определяется структурой блоков R_k матрицы $R_{(n)}$.

Глава 3

Специальные алгоритмы моделирования негауссовских процессов и полей

Методы статистического моделирования случайных процессов и полей находят широкое научное и практическое применение в таких областях как статистическая метеорология, океанология, радиофизика, экономика, финансовая математика, теория управления и т.д. Современные задачи в этих областях требуют разработки алгоритмов моделирования многомерных случайных процессов и полей с учетом негауссовости, нестационарности и неоднородности, присущей реальным процессам. В данной главе рассматриваются вопросы, связанные с моделированием различных классов случайных процессов и полей с заданной статистической структурой, основанных на использовании реальных данных, а также на использовании некоторых обоснованных предположений о свойствах реальных процессов, например, стационарности, периодической коррелированно-

сти случайных процессов, однородности, однородности изотропности случайных полей и др.

3.1 Алгоритмы моделирования негауссовских процессов дискретного аргумента с приложениями в области статистической метеорологии

При моделировании негауссовских процессов широко используют методы, основанные на нелинейных преобразованиях гауссовских процессов. Наибольшее распространение среди них получил метод обратных функций распределения, на основе которого элемент многомерного случайного ряда или поля η_{ij} с одномерным распределением $F(x)$ и корреляционной функцией моделируется с помощью преобразования $\eta_{ij} = F^{-1}(\Phi(\xi_{ij}))$, где $\Phi(x)$ функция стандартного нормального распределения, а ξ_{ij} гауссовский ряд или поле с корреляционной функцией $r_{ij,kl}$. Корреляционная функция $\rho_{ij,kl}$ многомерного ряда η_{ij} является функцией $\rho_{ij,kl} = f(r_{ij,kl})$, вид которой определяется преобразованием $\eta_{ij} = F^{-1}(\Phi(\xi_{ij}))$. Подробно метод обратных функций распределения описан в работах [31,32], а в работах [23,38] рассмотрены различные модификации этого метода, основанные на нормализации реальных процессов. В данном разделе будут рассмотрены модификации метода нелинейных преобразований гауссовских процессов для построения дискретных случайных процессов с заданными статистическими свойствами. Будет рассмотрен также подход к моделированию бинарных рядов, основанных на моделировании марковских цепей различной связности.

3.1.1 Методы численного моделирования бинарных последовательностей

Рассмотрим метод моделирования последовательностей величин ω_t , принимающих значения ноль и единица с вероятностями $p_0 = P(\omega_t = 0)$ и $p_1 = P(\omega_t = 1)$ и корреляционной функцией $\text{corr}(\omega_t, \omega_{t+h}) = \beta_h$. Данный метод основан на пороговом преобразовании гауссовского процесса ξ_t со средним и дисперсией $M\xi_t = 0$, $D\xi_t = 1$ и корреляционной функцией $\text{corr}(\xi_t, \xi_{t+h}) = \gamma_h$ [28]. В этом случае полагаем

$$\omega_t = \begin{cases} 1, & \xi_t < c \\ 0, & \xi_t \geq c \end{cases} . \quad (3.1)$$

Здесь c выбирается из условия

$$p_1 = P(\chi_t = 1) = P(\zeta_t \geq c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^c e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad (3.2)$$

где p_1 считается заданной. Корреляционная функция процесса ω_t , заданного по (3.26) связана с корреляционной функцией гауссовского процесса соотношением

$$\beta_h = \text{corr}(\omega_t, \omega_{t+h}) = 1 - \frac{2}{p_1 p_0} T(c, a_h), \quad (3.3)$$

где $T(c, a_h)$ -функция Оуэна [39]

$$T(c, a_h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{a_h} e^{-\frac{c^2(1+u^2)}{2}} \frac{du}{1+u^2}, \quad a_h = \sqrt{\frac{1-\gamma_h}{1+\gamma_h}}. \quad (3.4)$$

Использование модели (3.26) требует предварительного вычисления функции γ_h при условии, чтобы β_h в выражении (2.29) совпадала с фактической функцией β_h^* в требуемом числе точек. Вообще говоря, функция найденная таким способом, может и не быть корреляционной, так что в каждом конкретном случае ее необходимо проверить

на положительную определенность. Для численного моделирования последовательности ω_t необходимо смоделировать гауссовскую последовательность ξ_t с корреляционной функцией γ_h (если таковая существует) и воспользоваться соотношением (3.26), где c - решение уравнения (2.28) при заданном $p_1 = \bar{p}_1^*$.

3.1.2 Марковские стохастические модели бинарных временных рядов

Модель дискретного временного ряда ω_t с конечным числом состояний – это математическая модель совместного распределения вероятностей $P(\omega_1 = \alpha_1, \omega_2 = \alpha_2, \dots)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ независимо принимают значения из $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$.

Реализации ряда ω_t можно моделировать с использованием соотношения

$$P(\omega_1 = \alpha_1, \omega_2 = \alpha_2, \dots) = P(\omega_1 = \alpha_1)P(\omega_2 = \alpha_2 | \omega_1 = \alpha_1) \dots \\ \dots P(\omega_{t+h} = \alpha_{t+h} | \omega_1 = \alpha_1, \omega_2 = \alpha_2, \dots, \omega_{t+h-1} = \alpha_{t+h-1}) \dots,$$

если заданы конкретные выражения для условных распределений в его правой части. В данном разделе будут рассмотрены марковские модели временных рядов ω_t .

Степенью связности марковской цепи называют число элементов ряда, определяющих следующий элемент. Таким образом, $P(\omega_t = \alpha_t | \omega_{t-1} = \alpha_{t-1}) = p_{ij}$ - вероятности перехода из состояния θ_i в состояние θ_j за один шаг описывают односвязную марковскую цепь. Далее, при увеличении степени связности в качестве переходных используются вероятности: $P(\omega_t = \alpha_t | \omega_{t-1} = \alpha_{t-1}, \omega_{t-2} = \alpha_{t-2})$ - для двусвязной цепи, $P(\omega_t = \alpha_t | \omega_{t-1} = \alpha_{t-1}, \omega_{t-2} = \alpha_{t-2}, \omega_{t-3} = \alpha_{t-3})$ - для трехсвязной цепи и так далее.

Среди цепей Маркова различают однородные и неоднородные цепи. Однородная односвязная марковская цепь считается полностью заданной, если известны вероятности $p_i = P(\omega_1 = \theta_i)$ в начальный

момент времени и не зависящая от времени матрица переходных вероятностей p_{ij} . При этом должны выполняться следующие очевидные соотношения:

$$p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1, \quad p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^N p_{ij} = 1.$$

Таким образом, однородная m -связная марковская цепь определяется начальными вероятностями

$$P(\omega_1 = \alpha_1), P(\omega_2 = \alpha_2 | \omega_1 = \alpha_1), \dots \\ \dots, P(\omega_m = \alpha_m | \omega_1 = \alpha_1, \dots, \omega_{m-1} = \alpha_{m-1}).$$

и переходными вероятностями

$$P(\omega_{m+1} = \alpha_{m+1} | \omega_1 = \alpha_1, \omega_2 = \alpha_2, \dots, \omega_m = \alpha_m).$$

Рассмотрим односвязную марковскую модель. Для односвязных однородных марковских моделей вероятности $p_i = P(\omega_t = \theta_i)$ зависят от времени. Соответствующие финальные вероятности $p_i^f = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i^t$, которые не зависят от начальных вероятностей p_i , определяются из системы линейных алгебраических уравнений [35]:

$$p_i^f = \sum_{j=1}^N p_{ji} p_j^f$$

при соблюдении условия нормировки

$$\sum_{i=1}^N p_i^f = 1.$$

Например, для случая $N = 2$ и $\theta_1 = 0, \theta_2 = 1$, матрица переходных вероятностей $\pi_{t,t+1} = (p_{ij})$ имеет вид

$$\pi_{t,t+1} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix},$$

где, $\alpha = P(\omega_{t+1} = 1|\omega_t = 0)$, $\beta = P(\omega_{t+1} = 0|\omega_t = 1)$, а финальные вероятности имеют вид

$$p_1^f = \frac{\beta}{\alpha + \beta}, \quad p_2^f = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (3.5)$$

и не зависят от начальных вероятностей $p_1 = P(\omega_1 = 1)$, $p_2 = P(\omega_1 = 0)$. Любая m -связная цепь Маркова ω_t может быть сведена к односвязной цепи Маркова для m -мерного вектора $\hat{\omega}_t = (\omega_t, \dots, \omega_{t+m-1})$ [37]. Например, двусвязная цепь Маркова с двумя состояниями θ_1 и θ_2 будет являться односвязной для двумерного вектора $\hat{\omega}_t = (\omega_t, \omega_{t+1})$, $t = 1, 2, \dots$ с четырьмя состояниями $\hat{\theta}_1 = (\theta_1, \theta_1)$, $\hat{\theta}_2 = (\theta_1, \theta_2)$, $\hat{\theta}_3 = (\theta_2, \theta_1)$, $\hat{\theta}_4 = (\theta_2, \theta_2)$. При этом $p_t = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3, \hat{p}_4)$, где

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 &= P(\hat{\omega}_t = \hat{\theta}_1) = P(\omega_t = \theta_1, \omega_{t+1} = \theta_1), \\ \hat{p}_2 &= P(\hat{\omega}_t = \hat{\theta}_2) = P(\omega_t = \theta_1, \omega_{t+1} = \theta_2), \\ \hat{p}_3 &= P(\hat{\omega}_t = \hat{\theta}_3) = P(\omega_t = \theta_2, \omega_{t+1} = \theta_1), \\ \hat{p}_4 &= P(\hat{\omega}_t = \hat{\theta}_4) = P(\omega_t = \theta_2, \omega_{t+1} = \theta_2). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Матрица переходных вероятностей $\pi_{i,i+1}$ будет разреженной, в каждой строке только два элемента не будут равны нулю:

$$\begin{aligned} &\pi_{t,t+1} = \\ &= \begin{pmatrix} P(\hat{\theta}_1 | \hat{\theta}_1) = 1 - \alpha & P(\hat{\theta}_1 | \hat{\theta}_2) = \alpha & P(\hat{\theta}_1 | \hat{\theta}_3) = 0 & P(\hat{\theta}_1 | \hat{\theta}_4) = 0 \\ P(\hat{\theta}_2 | \hat{\theta}_1) = 0 & P(\hat{\theta}_2 | \hat{\theta}_2) = 0 & P(\hat{\theta}_2 | \hat{\theta}_3) = 1 - \beta & P(\hat{\theta}_2 | \hat{\theta}_4) = \beta \\ P(\hat{\theta}_3 | \hat{\theta}_1) = \gamma & P(\hat{\theta}_3 | \hat{\theta}_2) = 1 - \gamma & P(\hat{\theta}_3 | \hat{\theta}_3) = 0 & P(\hat{\theta}_3 | \hat{\theta}_4) = 0 \\ P(\hat{\theta}_4 | \hat{\theta}_1) = 0 & P(\hat{\theta}_4 | \hat{\theta}_2) = 0 & P(\hat{\theta}_4 | \hat{\theta}_3) = \delta & P(\hat{\theta}_4 | \hat{\theta}_4) = 1 - \delta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Таким образом, система уравнений для нахождения финальных ве-

роятностей принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \beta & \beta \\ \gamma & 1 - \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 1 - \delta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} p_1^f \\ p_2^f \\ p_3^f \\ p_4^f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^f \\ p_2^f \\ p_3^f \\ p_4^f \end{pmatrix}, \quad \sum_{i=1}^4 p_i^f = 1. \quad (3.8)$$

Решив эту систему, получим:

$$p_1^f = \frac{\gamma\delta}{\gamma\delta + 2\alpha\delta + \alpha\beta}, \quad p_2^f = p_3^f = \frac{\alpha\delta}{\gamma\delta + 2\alpha\delta + \alpha\beta}, \quad p_4^f = \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta + 2\alpha\delta + \alpha\beta} \quad (3.9)$$

Если для этой простой (односвязной) цепи Маркова для двухмерного вектора в качестве начальных вероятностей взять вероятности $p_1^f, p_2^f, p_3^f, p_4^f$, то по этим параметрам процесс будет стационарным. Свяжем характеристики этой цепи с характеристиками соответствующей двухсвязной цепи Маркова:

$$\begin{aligned} P(\hat{\theta}_1 | \hat{\theta}_1) &= P(\theta_1 | \hat{\theta}_1) = 1 - \alpha, & P(\hat{\theta}_2 | \hat{\theta}_1) &= P(\theta_2 | \hat{\theta}_1) = \alpha, \\ P(\hat{\theta}_3 | \hat{\theta}_2) &= P(\theta_1 | \hat{\theta}_2) = 1 - \beta, & P(\hat{\theta}_4 | \hat{\theta}_2) &= P(\theta_2 | \hat{\theta}_2) = \beta, \\ P(\hat{\theta}_1 | \hat{\theta}_3) &= P(\theta_1 | \hat{\theta}_3) = \gamma, & P(\hat{\theta}_2 | \hat{\theta}_3) &= P(\theta_2 | \hat{\theta}_3) = 1 - \gamma, \\ P(\hat{\theta}_3 | \hat{\theta}_4) &= P(\theta_1 | \hat{\theta}_4) = \delta, & P(\hat{\theta}_4 | \hat{\theta}_4) &= P(\theta_2 | \hat{\theta}_4) = 1 - \delta. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Тогда

$$\begin{aligned} P(\theta_2) &= P(\hat{\theta}_3) + P(\hat{\theta}_4) = \hat{p}_3^f + \hat{p}_4^f = \frac{1}{1 + \frac{\delta(\gamma + \alpha)}{\alpha(\beta + \delta)}}, \\ P(\theta_2 | \theta_2) &= \frac{P(\hat{\theta}_4)}{P(\theta_2)} = \frac{\beta}{\beta + \delta}, \quad P(\theta_1 | \theta_1) = \frac{P(\hat{\theta}_1)}{1 - P(\theta_2)} = \frac{\gamma}{\gamma + \alpha}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

что эквивалентно стационарности процесса ω_t по одномерным и двумерным распределениям.

Аналогично определяются финальные вероятности для трехсвязной цепи Маркова.

3.1.3 Распределение длительностей серий из одинаковых состояний (верификация численных моделей)

Вопрос об адекватности модельных последовательностей реальным данным является одним из самых важных, так как он связан с тем, насколько точно модельные последовательности описывают реальную последовательность. Как отмечалось в работах [11,28,34], проверка адекватности модели по существу представляет собой сравнение некоторых вероятностных характеристик реальной последовательности с аналогичными характеристиками модельных рядов. Для этой цели важно выбирать только такие характеристики, которые не используются непосредственно при построении численной вероятностной модели.

В качестве характеристик для верификации моделей в работе рассматривается распределение длительности серий из одинаковых состояний $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$. Сходные характеристики рассматривались в работах [28,37] для бинарных последовательностей. Эти характеристики не являются входными параметрами моделей и поэтому могут служить тестовыми функциями для проверки точности моделей.

Распределения продолжительности серий состояния θ_i определяются формулами

$$P(L_i = k) = \frac{P(\omega_t = \theta_j, \omega_{t+1} = \theta_i, \dots, \omega_{t+k} = \theta_i, \omega_{t+k+1} = \theta_l)}{P(\omega_t = \theta_j, \omega_{t+1} = \theta_i)}, \quad (3.12)$$

$j, l \neq i, \quad k = 1, 2, \dots$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} p_{i,h+1} &= P(\omega_t = \theta_i, \omega_{t+1} = \theta_i, \dots, \omega_{t+h} = \theta_i), \quad h = 0, 1, 2, \dots, \\ p_{i,1} &= P(\omega_t = \theta_i). \end{aligned} \quad (3.13)$$

В этих обозначениях распределения длительностей (3.12) и соответствующие им интегральные распределения имеют вид

$$\begin{aligned} P(L_i = k) &= \frac{p_{i,k} - 2p_{i,k+1} + p_{i,k=2}}{p_{i,1} - p_{i,2}}, \\ P(L_i \geq k) &= \frac{p_{i,k} - p_{i,k+1}}{p_{i,1} - p_{i,2}}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.14)$$

Приведем вывод первой из этих двух формул, вторая получается аналогично.

Покажем, что для любой последовательности конечной длины N имеет место соотношение

$$\begin{aligned}
& n(L_i = k) = \\
& = n(\omega_t = \theta_i, \dots, \omega_{t+k-1} = \theta_i) - 2n(\omega_t = \theta_i, \dots, \omega_{t+k} = \theta_i) + \\
& \quad + n(\omega_t = \theta_i, \dots, \omega_{t+k+1} = \theta_i) = \\
& = n_{i,k} - 2n_{i,k+1} + n_{i,k+2},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

где $n(L_i = k)$ - число серий из состояния θ_i в этой последовательности, а $n_{i,j}$ - число событий во всем ряде длины N , состоящих в том, что смежные j элементов ряда принимают одинаковые значения θ_i (соответствуют одинаковым состояниям θ_i).

Справедливость этого соотношения доказывается непосредственным последовательным подсчетом числа событий $(L_i = k)$, $(\omega_t = \theta_i, \dots, \omega_{t+k-1} = \theta_i)$, $(\omega_t = \theta_i, \dots, \omega_{t+k} = \theta_i)$, $(\omega_t = \theta_i, \dots, \omega_{t+k+1} = \theta_i)$.

Действительно, пусть мы находимся в серии состояний θ_i длины j . Для этой серии, если $j > k$, имеет место равенство $n_{i,k} - 2n_{i,k+1} + n_{i,k+2} = 0$. Если $j < k$, то все три слагаемые этого равенства равны нулю. Если $j = k$, то $n_{i,k} = 1$, а остальные слагаемые равны нулю. Таким образом, по формуле (3.15) во всем ряде подсчитывается только число серий состояний θ_i длины k .

Аналогично получаем, что

$$n(L_i) = n(\omega_t = \theta_i) - n(\omega_t = \theta_i, \omega_{t+1} = \theta_i) = n_{i,1} - n_{i,2}.$$

Далее с помощью предельного перехода при $N \rightarrow \infty$ получаем соотношение (3.14).

Среднее значение длительности серий из θ_i состояния определя-

ется выражением

$$M_i = \sum_{k=1}^{\infty} kP(L_i = k) = \frac{p_{i,1}}{p_{i,1} - p_{i,2}}, \quad (3.16)$$

откуда

$$p_{i,2} = p_{i,1} \left(1 - \frac{1}{M_i}\right) \quad (3.17)$$

Здесь и в последующем M_i берутся в безразмерном виде. Для получения размерных величин необходимо умножить M_i на шаг Δt между соседними элементами временного ряда.

Для ряда индикаторов осадков число состояний равно двум. Для этого случая, очевидно, выполняется равенство $p_{1,1} - p_{2,1} = p_{2,1} - p_{2,2}$, поэтому, в соответствии с (3.17)

$$p_{1,1} = \frac{M_1}{M_1 + M_2}, \quad p_{2,1} = \frac{M_2}{M_1 + M_2}, \quad p_{1,1} + p_{2,1} = 1. \quad (3.18)$$

По аналогии с [48], для любого стационарного ряда индикаторного ряда с состояниями θ_i получаем соотношения

$$P(\omega_{t+1} = \theta_i | \omega_t = \theta_i) = 1 - \frac{1}{M_i}, \quad (3.19)$$

$$P(\omega_{t+2} = \theta_i | \omega_t = \theta_i, \omega_{t+1} = \theta_i) = 1 - \frac{1 - P(L_i = i)}{M_i - 1}. \quad (3.20)$$

В односвязной марковской модели вероятности (3.19) определяется только средними M_i , а в двусвязной вероятности (3.20) зависят еще от $P(L_i = i)$.

Для односвязной модели потребуем, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} M_i &= \bar{M}_i^*, \\ P(L_i = 1) &= \bar{P}(L_i^* = 1), \end{aligned} \quad (3.21)$$

а для двусвязной дополнительно потребуем, чтобы

$$P(L_i = 2) = \bar{P}(L_i^* = 2), \quad (3.22)$$

где справа в равенствах фигурируют фактические характеристики, вычисленные по реальным рядам. Кроме того, полагаем $p_1 = \bar{p}_1^*$. Так как $P(L_i \geq 2) = 1 - P(L_i = 1)$, то, в соответствии с (3.21) и (3.22), $P(L_i \geq 2) = \bar{P}(L_i^* \geq 2)$.

В случае односвязной однородной марковской цепи

$$p_{i,k+1} = p_{i,1}p^k, \quad k \geq 0,$$

где p задается соотношением

$$p = P(\omega_{t+1} = \theta_i | \omega_t = \theta_i) = 1 - \frac{1}{M_i}.$$

Окончательные выражения для модельных распределений в случае односвязной марковской цепи $P(L_i = k)$, $k = 1, 2, \dots$, принимают вид

$$\begin{aligned} P(L_i = k) &= (1 - p)p^{k-1}, \quad k \geq 1, \\ p &= 1 - \frac{1}{M_i^*}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

В случае двусвязной марковской цепи

$$p_{i,k+1} = p_{i,2}q^{k-1}, \quad k \geq 1,$$

где q имеет смысл вероятности (3.20) в виде

$$q = P(\omega_{t+2} = \theta_i | \omega_t = \theta_i, \omega_{t+1} = \theta_i) = 1 - \frac{1 - P(L_i = 1)}{M_i - 1}.$$

В этом случае выражения для модельных распределений $P(L_i = k)$, $k = 1, 2, \dots$, принимают вид

$$\begin{aligned} P(L_i = 1) &= \bar{P}(L_i^* = 1), \\ P(L_i = k) &= \bar{P}(L_i^* \geq 2)(1 - q)q^{k-2}, \quad k \geq 2, \\ q &= 1 - \frac{1 - \bar{P}(L_i^* = 1)}{M_i^* - 1}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

По аналогии могут быть получены рекуррентные формулы для вычисления распределений длительности серий одинаковых состояний

марковских моделей и большей степени связности. Приведем для примера соответствующие формулы для трехсвязной марковской модели. В этом случае

$$p_{i,k+1} = p_{i,3}r^{k-2}, \quad k \geq 2,$$

где r имеет смысл вероятности

$$r = P(\omega_{t+3} = \theta_i | \omega_t = \theta_i, \omega_{t+1} = \theta_i, \omega_{t+2} = \theta_i) = 1 - \frac{1 - P(L_i \geq 3)}{M_i + P(L_i = 1) - 2}.$$

Рекуррентные формулы для модельных распределений $P(L_i = k), k = 1, 2, \dots$, в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned} P(L_i = 1) &= \bar{P}(L_i^* = 1), \\ P(L_i = 2) &= \bar{P}(L_i^* = 2), \\ P(L_i = k) &= \bar{P}(L_i^* \geq 3)(1 - r)r^{k-3}, \quad k \geq 3; \\ r &= 1 - \frac{1 - P(L_i^* \geq 3)}{M_i + P(L_i^* = 1) - 2}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Отметим, что вероятности переходов $P(\omega_{t+1} = \theta_i | \omega_t = \theta_i)$, $P(\omega_{t+2} = \theta_i | \omega_t = \theta_i, \omega_{t+1} = \theta_i)$, $P(\omega_{t+3} = \theta_i | \omega_t = \theta_i, \omega_{t+1} = \theta_i, \omega_{t+2} = \theta_i)$ для однородной цепи соответствующей связности не зависят от t , поэтому соотношения (3.23)-(3.25) выполняется как для стационарных, так и для нестационарных по одномерным распределениям процессов.

Дальнейшее обобщение этих соотношений на случай цепей большей связности можно сделать, используя технику сведения m -связной марковской цепи к односвязной цепи для m -мерного вектора $\hat{\omega}_t = (\omega_t, \dots, \omega_{t+m-1})$. В качестве примера рассмотрим соотношение (3.25) для трехсвязной цепи с двумя состояниями θ_1 и θ_2 . В этом случае вектор $\hat{\omega}_t = (\omega_t, \omega_{t+1}, \omega_{t+2})$ может принимать значения

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_1 &= (\theta_1, \theta_1, \theta_1), \quad \hat{\theta}_2 = (\theta_1, \theta_1, \theta_2), \quad \hat{\theta}_3 = (\theta_1, \theta_2, \theta_1), \quad \hat{\theta}_4 = (\theta_1, \theta_2, \theta_2), \\ \hat{\theta}_5 &= (\theta_2, \theta_1, \theta_1), \quad \hat{\theta}_6 = (\theta_2, \theta_1, \theta_2), \quad \hat{\theta}_7 = (\theta_2, \theta_2, \theta_1), \quad \hat{\theta}_8 = (\theta_2, \theta_2, \theta_2) \end{aligned}$$

с вероятностями

$$\hat{p}_i = P(\hat{\theta}_i), \quad i = 1, \dots, 8$$

и матрицей переходов на один шаг с элементами $P(\hat{\theta}_i | \hat{\theta}_j)$. В случае односвязной однородной марковской цепи $\hat{\omega}_t = (\omega_t, \omega_{t+1}, \omega_{t+2})$

$$\begin{aligned} \hat{p}_{8,k+1} &= \hat{p}_{8,1} \left(P \left(\hat{\theta}_8 | \hat{\theta}_8 \right) \right)^k = p_{2,3} r^{k-2} = p_{2,k+1}, \quad k \geq 0, \\ r &= P(\omega_{t+3} = \theta_i | \omega_t = \theta_i, \omega_{t+1} = \theta_i, \omega_{t+2} = \theta_i), \end{aligned} \quad (3.26)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{p}_{8,k+1} &= P(\hat{\omega}_t = \hat{\theta}_8, \hat{\omega}_{t+1} = \hat{\theta}_{8i}, \dots, \hat{\omega}_{t+k} = \hat{\theta}_8), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ \hat{p}_{8,1} &= P(\hat{\omega}_t = \hat{\theta}_8). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что эти два представления эквивалентны, при этом из (3.26) следует соотношение (3.25).

Отметим, что при сведении m -связной марковской цепи к односвязной цепи для m -мерного вектора матрица переходных вероятностей для последней оказывается разреженной из-за того, что некоторые переходы оказываются недостижимыми. Специфика построения векторной последовательности определяет ленточный характер матриц переходов. Однако при решении прикладных задач, в которых число состояний определяется самой постановкой, матрицы переходных вероятностей могут оказаться заполненными. Такие ситуации возникают, например, когда рассматриваются временные ряды температуры воздуха или совместные ряды температуры и сумм осадков, причем эти элементы принимают дискретные значения, соответствующие определенным градациям из фиксированного числа градаций.

3.2 Моделирование комплексов негауссовских процессов и полей. Примеры построения вероятностных моделей реальных процессов

Численное стохастическое моделирование комплекса метеорологических элементов, используемое в гидрометеорологии уже несколько десятилетий, приобрело особую актуальность с началом масштабных работ по оценке последствий изменений климата. В рамках данной проблемы рассматриваемый подход используется при интерпретации результатов моделирования глобального климата и разработке региональных сценариев изменений климата, в моделях биологической продуктивности и оценки урожайности сельскохозяйственных культур, в моделях водного баланса и др. Получаемые результаты, однако, чувствительны к качеству воспроизведения вероятностной структуры моделируемых рядов. Значительные упрощения, используемые при построении стохастических моделей, могут приводить к серьезным ограничениям в их применении. Для получения более надежных результатов и расширения возможностей использования численного стохастического моделирования в климатических приложениях необходимо повышение точности модельного описания реальной изменчивости метеорологических рядов.

В данном разделе рассматриваются алгоритмы численного стохастического моделирования векторных стационарных негауссовских рядов, которые позволяют воспроизводить изменение во времени совокупности непрерывных и дискретных метеорологических величин суточного разрешения, таких как приземная температура воздуха, индикаторы количества осадков, компоненты скорости ветра, общая облачность [17,29]. Для адекватного описания одномерных распределений используются их представления в виде смеси нормальных распределений, а также специальные пороговые преобразования гауссовских процессов. Модель ориентирована на применение

ние при интерпретации результатов климатического моделирования для оценки последствий изменений климата и решение различных задач прикладной климатологии.

В работе [21] показано, что семейство распределений, являющееся смесью двух нормальных распределений, вида

$$P_{\xi}(x) = \frac{\theta}{\sqrt{2\pi}\sigma^{(1)}} e^{-\frac{(x-\mu^{(1)})^2}{2(\sigma^{(1)})^2}} + \frac{1-\theta}{\sqrt{2\pi}\sigma^{(2)}} e^{-\frac{(x-\mu^{(2)})^2}{2(\sigma^{(2)})^2}}, \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

имеют любые наперед заданные средние значения, дисперсию и коэффициент асимметрии.

Если $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ - нормальные величины с параметрами $\mu^{(1)}$, $\sigma^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$ + $\sigma^{(2)}$ соответственно, а S - событие, которое появляется с вероятностью $\theta = P(S)$ ($P(\bar{S}) = 1 - \theta$), то такое распределение имеет случайная величина

$$\xi = \omega\xi^{(1)} + (1 - \omega)\xi^{(2)} \quad (3.27)$$

Здесь ω - индикатор события S . Поскольку зависимость между $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ не влияет на распределение, случайной величины ξ , то вместо (3.27) можно использовать формулу

$$\xi = \omega(\mu^{(1)} + \sigma^{(1)}\eta) + (1 - \omega)(\mu^{(2)} + \sigma^{(2)}\eta), \quad (3.28)$$

где η - нормальная величина с нулевым средним и единичной дисперсией [21].

При некоторых допущениях [21] преобразование (3.28), позволяет в явном виде выписать корреляции гауссовских рядов (или полей) через заданные корреляции соответствующих рядов и полей в виде смеси двух нормальных распределений. Это существенно упрощает процедуру предварительного пересчета корреляций, необходимую при реализации метода функциональных преобразований гауссовских процессов и полей. Возникающие при этом ограничения на корреляции моделируемых рядов, а также дополнительные

ограничения, связанные с тем, что индикаторы ω также моделируются с помощью специального функционального преобразования гауссовских величин, тем не менее оставляют достаточно широкие возможности для моделирования реальных процессов.

3.2.1 Численные стохастические модели совместных временных рядов с одномерными распределениями в виде смеси двух нормальных распределений

Представим n временных рядов с одномерными распределениями

$$P_{\xi_{kt}}(x) = \frac{\theta_{kt}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{kt}^{(1)}} e^{-\frac{(x-\mu_{kt}^{(1)})^2}{2(\sigma_{kt}^{(1)})^2}} + \frac{1-\theta_{kt}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{kt}^{(2)}} e^{-\frac{(x-\mu_{kt}^{(2)})^2}{2(\sigma_{kt}^{(2)})^2}}, \quad 0 \leq \theta_{kt} \leq 1, \quad (3.29)$$

в виде следующих преобразований

$$\begin{aligned} \xi_{1t} &= \omega_{1t}(\mu_1^{(1)} + \sigma_1^{(1)}\eta_{1t}) + (1 - \omega_{1t})(\mu_1^{(2)} + \sigma_1^{(2)}\eta_{1t}), \\ \xi_{2t} &= \omega_{2t}(\mu_2^{(1)} + \sigma_2^{(1)}\eta_{2t}) + (1 - \omega_{2t})(\mu_2^{(2)} + \sigma_2^{(2)}\eta_{2t}), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\xi_{nt} = \omega_{nt}(\mu_n^{(1)} + \sigma_n^{(1)}\eta_{nt}) + (1 - \omega_{nt})(\mu_n^{(2)} + \sigma_n^{(2)}\eta_{nt}), \quad t = 1, 2, \dots$$

Здесь $\mu_k^{(1)}$, $\sigma_k^{(1)}$, $\mu_k^{(2)}$, $\sigma_k^{(2)}$, ($k = 1, 2, 3$) - параметры смесей, η_{kt} - гауссовские ряды с

совместной матричной корреляционной функцией

$$\begin{aligned} G_{t,t+\tau} &= (g_{i,j;t,t+\tau}), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad t, \tau = 0, 1, \dots, \\ g_{i,j;t,t+\tau} &= \frac{M(\eta_{it} - M\eta_{it})(\eta_{jt+\tau} - M\eta_{jt+\tau})}{\sqrt{D\eta_{it}}\sqrt{D\eta_{jt+\tau}}}, \end{aligned}$$

а ω_{kt} индикаторные ряды, которые в свою очередь строятся с помощью преобразования

$$\omega_{kt} = \begin{cases} 1, & \psi_{kt} \leq c_{kt} \\ 0, & \psi_{kt} > c_{kt} \end{cases}, \quad (3.31)$$

где ψ_{kt} - независимые от η_{lt} , ($k, l = 1, \dots, n$) гауссовские ряды с совместной матричной корреляционной функцией

$$Q_{t,t+\tau} = (q_{i,j;t,t+\tau}), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad t, \tau = 0, 1, \dots$$

Величины c_{kt} связаны с вероятностями $P(\omega_{kt} = 1) = \theta_{kt}$ соотношением

$$P(\omega_{kt} = 1) = \theta_{kt} = \Phi(c_{kt}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{c_{kt}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx. \quad (3.32)$$

Матричная корреляционная функция рядов ξ_{kt}

$$R_{t,t+\tau} = (r_{i,j;t,t+\tau}), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad t, \tau = 0, 1, \dots \quad (3.33)$$

определяется функциями $G_{t,t+\tau}$ и $Q_{t,t+\tau}$ и преобразованиями (3.29). Общие соотношения, связывающие корреляционные функции $G_{t,t+\tau}$, $Q_{t,t+\tau}$ с корреляционной функцией $R_{t,t+\tau}$ для случая одного ряда получены в работе [4]. Они легко обобщаются на случай моделирования n совместных рядов, причем формулы для взаимных корреляционных функций содержат параметры распределений различных рядов. В задачах моделирования негауссовских случайных процессов с заданной корреляционной структурой корреляционная функция $R_{t,t+\tau}$ считается заданной, а функции $G_{t,t+\tau}$ и $Q_{t,t+\tau}$ находятся из соответствующих уравнений. В данном случае решение не является однозначным, главная задача состоит в том, чтобы определить функции $G_{t,t+\tau}$ и $Q_{t,t+\tau}$ такие, чтобы они были положительно определенными матричными корреляционными функциями. Для упрощения можно положить $G_{t,t+\tau} = Q_{t,t+\tau} = K_{t,t+\tau} = (k_{i,j;t,t+\tau})$, $i, j = 1, \dots, n$, $t, \tau = 0, 1, \dots$. В этом случае уравнения, связывающие элементы матриц $R_{t,t+\tau}$ и $B_{t,t+\tau}$ принимают вид

$$\theta_{kt} = P(\omega_{kt} = 1),$$

$$\begin{aligned}
M\xi_{kt} &= \mu_k = \theta_{kt}\mu_{kt}^{(1)} + (1 - \theta_{kt})\mu_{kt}^{(2)}, \\
D\xi_{kt} &= \sigma_{kt}^2 = \\
&= \theta_{kt}[(\sigma_{kt}^{(1)})^2 - (\mu_{kt}^{(1)} - \mu_{kt})^2] + (1 - \theta_{kt})[(\sigma_{kt}^{(2)})^2 - (\mu_{kt}^{(2)} - \mu_{kt})^2] \\
A_{1k} &= A_{1k}(\theta_{kt}, \sigma_{kt}^{(1)}, \sigma_{kt}^{(2)}) = \frac{\sigma_{kt}^2 - (\sigma_{kt}^{(2)} - \sigma_{kt}^{(1)})^2\theta_{kt}(1 - \theta_{kt})}{2(\sigma_{kt}^{(2)} - \sigma_{kt}^{(1)})^2\theta_{kt}(1 - \theta_{kt})}, \\
A_{2k} &= A_{2k}(\theta_{kt}, \sigma_{kt}^{(3.27)}, \sigma_{kt}^{(3.28)}) = \frac{\sigma_{kt}^2}{2(\sigma_{kt}^{(3.28)} - \sigma_{kt}^{(3.27)})^2\theta_{kt}(1 - \theta_{kt})}, \quad (3.34)
\end{aligned}$$

$$k_{k,k;t,t+\tau} = -A_{1k} + \sqrt{A_{1k}^2 + 2A_{2k}r_{k,k;t,t+\tau}},$$

$$k = 1, \dots, n$$

$$\begin{aligned}
C_{1kl} &= C_{1kl}(\theta_{kt}, \theta_{l,t+\tau}, \mu_{kt}^{(1)}, \mu_{kt}^{(2)}, \mu_{l,t+\tau}^{(1)}, \mu_{l,t+\tau}^{(2)}, \sigma_{kt}^{(1)}, \sigma_{kt}^{(2)}, \sigma_{l,t+\tau}^{(1)}, \sigma_{l,t+\tau}^{(2)}) = \\
&= \frac{(\theta_{kt}\sigma_{kt}^{(3.27)} + (1 - \theta_{kt})\sigma_{kt}^{(2)})(\theta_{l,t+\tau}\sigma_{l,t+\tau}^{(1)} + (1 - \theta_{l,t+\tau})\sigma_{l,t+\tau}^{(2)})}{2\sqrt{\theta_k(1 - \theta_k)\theta_{l,t+\tau}(1 - \theta_{l,t+\tau})(\sigma_{kt}^{(2)} - \sigma_{kt}^{(1)})(\sigma_{l,t+\tau}^{(2)} - \sigma_{l,t+\tau}^{(1)})}} + \\
&\quad + \frac{(\mu_{kt}^{(2)} - \mu_{kt}^{(1)})(\mu_{l,t+\tau}^{(2)} - \mu_{l,t+\tau}^{(1)})}{2(\sigma_{kt}^{(2)} - \sigma_{kt}^{(1)})(\sigma_{l,t+\tau}^{(2)} - \sigma_{l,t+\tau}^{(1)})} \\
C_{2k,l} &= C_{2k,l}(\theta_{kt}, \theta_{l,t+\tau}, \sigma_{kt}^{(1)}, \sigma_{kt}^{(2)}, \sigma_{l,t+\tau}^{(1)}, \sigma_{l,t+\tau}^{(2)}) = \quad (3.35) \\
&= \frac{\sigma_{kt}\sigma_{l,t+\tau}}{2\sqrt{\theta_{kt}(1 - \theta_{kt})\theta_{l,t+\tau}(1 - \theta_{l,t+\tau})(\sigma_{kt}^{(2)} - \sigma_{kt}^{(1)})(\sigma_{l,t+\tau}^{(2)} - \sigma_{l,t+\tau}^{(1)})}},
\end{aligned}$$

$$k_{k,l;t,t+\tau} = C_{1k,l} + \sqrt{C_{1k,l}^2 + 2C_{2k,l}r_{k,l;t,t+\tau}},$$

$$k, l = 1, \dots, n,$$

где элементы $k_{i,j;t,t+\tau}$ матричной функции $K_{t,t+\tau}$ для гауссовского ряда, а $r_{i,j;t,t+\tau}$ - элементы заданной матрицы. Отметим, что в формулах (3.34),(3.35) величины $r_{k,l;t,t+\tau}$, $k, l = 1, \dots, n$ должны удовлетворять неравенствам

$$-\frac{A_{1k}^2}{2A_{2k}} \leq r_{k,k;t,t+\tau} \leq 1,$$

$$-\frac{B_{1kl}^2}{2B_{2kl}} \leq r_{k,l;t,t+\tau} \leq 1.$$

Например, в простейшем случае, когда ряды стационарны, первое неравенство принимает вид

$$-\frac{(\sigma_k^2 - (\sigma_k^{(2)} - \sigma_k^{(1)})^2)^2}{4\sigma_k^2(\sigma_k^{(2)} - \sigma_k^{(1)})^2} \theta_k(1 - \theta_k) \leq r_{k,k;\tau} \leq 1.$$

Поскольку $k_{i,j;t,t+\tau}$ являются решениями нелинейных уравнений, то, вообще говоря, матричная функция $K_{t,t+\tau}$ может оказаться не корреляционной и ее необходимо будет соответствующим образом корректировать [17,28].

Преобразования (3.29) могут быть использованы для моделирования совместных временных рядов различных метеоэлементов, распределения которых описываются смесями двух нормальных распределений. В данной работе рассматриваются временные ряды среднесуточной температуры приземного воздуха T_t и составляющих u_t и v_t среднесуточного приземного ветра. В этом случае $n = 3$, а $\xi_{1t} = T_t$, $\xi_{2t} = u_t$, $\xi_{3t} = v_t$.

Для оценки одномерных распределений этих метеоэлементов был использован специальный метод, предложенный в работе [21], в котором параметры смеси определяются с помощью метода моментов.

Графики эмпирических плотностей и соответствующие аппроксимирующие функции приведены на Рис.3.1.-3.2. В Табл. 3.1 приве-

дены оценки средних значений, дисперсий и коэффициентов асимметрии, вычисленные по реальным данным и соответствующие им значения, вычисленные на основе построенных плотностей.

Таблица 3.1: Сравнение фактических и модельных моментов распределения среднесуточных температуры и компонентов скорости ветра

	T		u		v	
	R	M	R	M	R	M
m	-14.651	-14.640	-1.730	-1.725	-0.142	-0.146
σ^2	68.045	69.188	5.760	5.951	-5.045	5.382
A	-0.696	-0.670	-0.158	-0.172	0.244	0.300

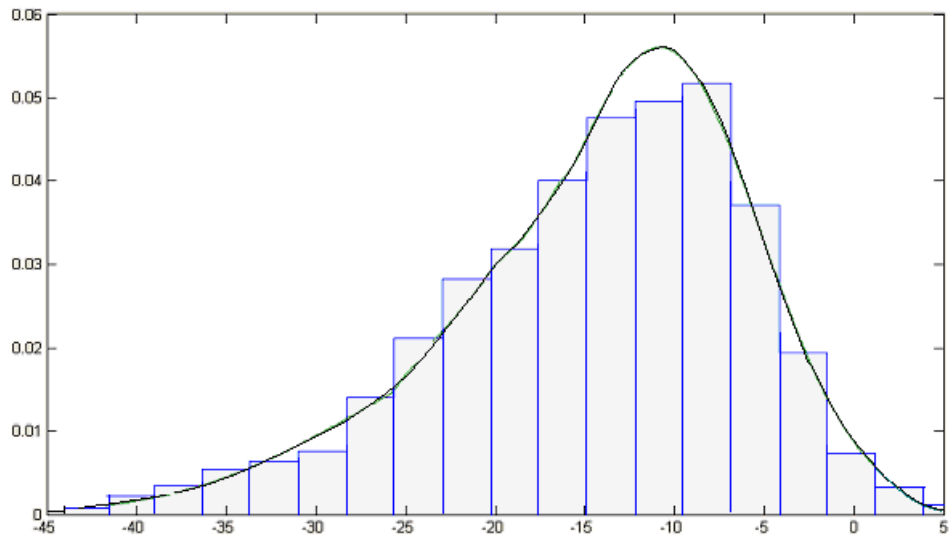


Рис. 3.1: Гистограмма и модельная плотность распределения среднесуточной температуры воздуха (январь)

Матричная корреляционная функция $R_{t,t+\tau}$ в этом случае имеет

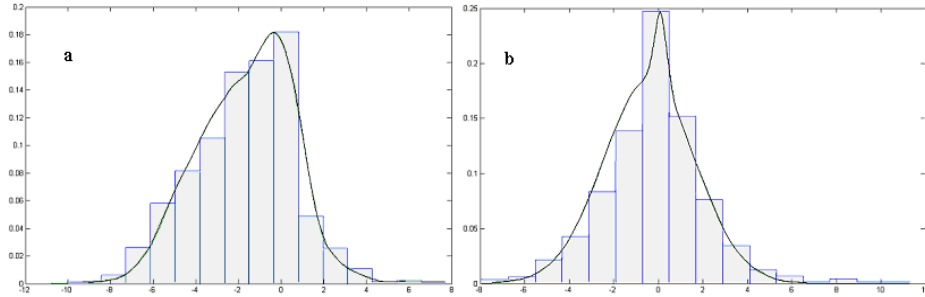


Рис. 3.2: Гистограмма и модельная плотность распределения зональной (а) и меридиональной (б) составляющих среднесуточной скорости ветра (январь).

следующий вид

$$\begin{aligned}
 R_{t,t+\tau} &= \\
 &= \begin{pmatrix} r_{11;t,t+\tau} & r_{12;t,t+\tau} & r_{13;t,t+\tau} \\ r_{21;t,t+\tau} & r_{22;t,t+\tau} & r_{23;t,t+\tau} \\ r_{31;t,t+\tau} & r_{32;t,t+\tau} & r_{33;t,t+\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{TT;t,t+\tau} & r_{Tu;t,t+\tau} & r_{Tv;t,t+\tau} \\ r_{uT;t,t+\tau} & r_{uu;t,t+\tau} & r_{uv;t,t+\tau} \\ r_{vT;t,t+\tau} & r_{vu;t,t+\tau} & r_{vv;t,t+\tau} \end{pmatrix}, \\
 & \quad t = 1, 2, \dots, \quad \tau = 0, 1, \dots
 \end{aligned}$$

Практические расчеты показали, что матричная функция $K_{t,t+\tau}$, полученная из заданной по формулам (3.33)-(3.34), оказалась корреляционной, то есть блочно теплицева симметричная матрица, образованная из нее оказалась положительно определенной (все ее собственные числа оказались положительными и существенно отделенными от нуля).

Ниже приведены графики некоторых корреляционных функций, полученных по реальным и модельным данным.

Как видно из рисунков, модельные (рассчитанные по 10000 реализаций) и фактические корреляции различаются незначительно в рамках статистической погрешности. Следует отметить, что в данном случае для пересчета корреляций используются явные формулы

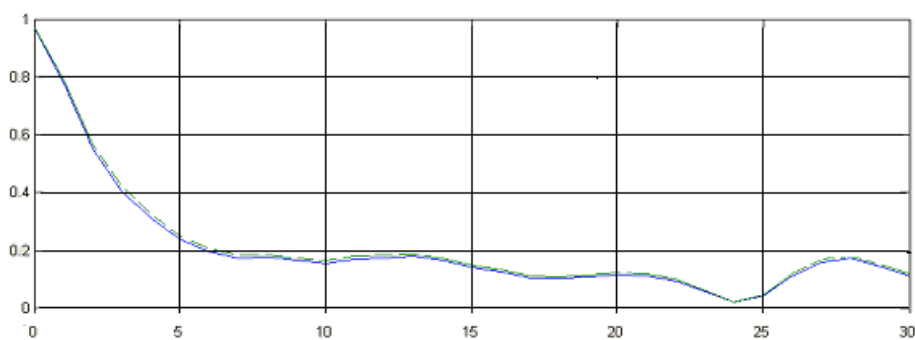


Рис. 3.3: Корреляционные функции среднесуточной температуры воздуха, вычисленные по реальным (сплошная линия) и по модельным данным (пунктирная линия).

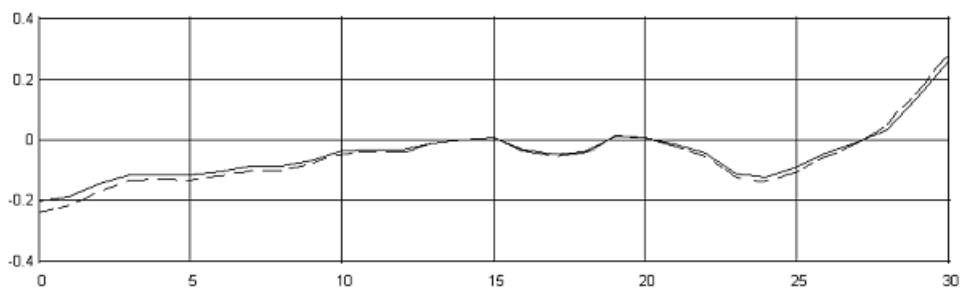


Рис. 3.4: Взаимные корреляционные функции среднесуточной температуры воздуха и зональной компоненты скорости ветра, вычисленные по реальным (сплошная линия) и по модельным данным (пунктирная линия).

для вычисления корреляций для гауссовских рядов, что существенно упрощает процедуру пересчета корреляций.

3.2.2 Модели совместных гидрометеорологических временных рядов с распределениями в виде смесей двух нормальных распределений и дискретными распределениями

Рассмотрим матричные корреляционные функции вида (3.32) для случая двух совместных рядов ξ_{kt} и ξ_{lt} , ($t = 1, 2, \dots$) различных метеорологических элементов

$$R_{t,t+\tau} = \begin{pmatrix} r_{kk;t,t+\tau} & r_{kl;t,t+\tau} \\ r_{lk;t,t+\tau} & r_{ll;t,t+\tau} \end{pmatrix}, \quad t = 1, 2, \dots, \quad \tau = 0, 1, \dots, \quad (3.36)$$

где элементами этой матричной корреляционной функции являются автокорреляционные и взаимные корреляционные функции двух различных из перечисленных ниже рядов: температуры, компонентов скорости ветра, индикаторов осадков и балла облачности и т.д. В приложениях чаще всего используют комплексы из двух или трех метеорологических рядов. Например, в задачах, связанных с оценкой вероятностей возникновения лесных пожаров могут быть использованы ряды температуры воздуха и осадков, либо ряды температуры и влажности, в задачах, связанных с оценкой вероятностей благоприятных или неблагоприятных летних условий могут быть использованы ряды скорости ветра и балла облачности, в задачах агрометеорологии ряды температуры, влажности или осадков и солнечной радиации. В данном разделе будут рассмотрены модели различных пар метеорологических рядов с одномерными распределениями двух типов: в виде смеси двух нормальных распределений и распределений дискретного типа [17].

а) Рассмотрим два временных ряда

$$\begin{aligned} \xi_{kt} &= \omega_{kt}(\mu_k^{(1)} + \sigma_k^{(1)}\eta_{kt}) + (1 - \omega_{kt})(\mu_k^{(2)} + \sigma_k^{(2)}\eta_{kt}), \\ \xi_{lt} &= \begin{cases} 1, & \eta_{lt} \leq c_{lt} \\ 0, & \eta_{li} \leq c_{lt} \end{cases}, \\ &t = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.37)$$

где η_{kt} и η_{lt} гауссовские временные ряды с матричной корреляционной функцией

$$G_{t,t+\tau} = \begin{pmatrix} g_{kk;t,t+\tau} & g_{kl;t,t+\tau} \\ g_{lk;t,t+\tau} & g_{ll;t,t+\tau} \end{pmatrix}, \quad t = 1, 2, \dots, \tau = 0, 1, \dots, \quad (3.38)$$

вероятности $P(\omega_{lt} = 1)$ определяются соотношением (3.31), а вероятности $P(\xi_{lt} = 1)$ аналогичным соотношением

$$p_{lt} = P(\xi_{lt} = 1) = P(\eta_{lt} \leq c_t) = \Phi(c_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{c_t} e^{-\frac{1}{2}u^2} du,$$

где ψ_{kt} и η_{lt} - независимые друг от друга гауссовские ряды.

В данном случае первый ряд может соответствовать временному ряду среднесуточной температуры приземного воздуха $\xi_{kt} = T_t$ или одной из компонент осредненной за сутки скорости ветра $\xi_{kt} = u_t$, а второй - индикаторы суточных сумм осадков $\xi_{lt} = \Omega_t$. Для случая $\xi_{kt} = T_t$ совместная корреляционная матрица рядов ξ_{kt} и ξ_{lt} имеет вид

$$R_{t,t+\tau} = \begin{pmatrix} r_{kk;t,t+\tau} & r_{kl;t,t+\tau} \\ r_{lk;t,t+\tau} & r_{ll;t,t+\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{TT;t,t+\tau} & r_{T\Omega;t,t+\tau} \\ r_{\Omega T;t,t+\tau} & r_{\Omega\Omega;t,t+\tau} \end{pmatrix},$$

$t = 1, 2, \dots, \tau = 0, 1, \dots$

В этом случае уравнение, связывающие корреляционные функции $r_{kk;t,t+\tau}$ и $k_{kk;t,t+\tau}$ имеет вид (3.33), а уравнение, связывающее корреляционные функции $r_{ll;t,t+\tau}$ и $g_{ll;t,t+\tau}$ и рассмотренное в работе [2] имеет вид

$$r_{ll;t,t+\tau} = \frac{0.5p_t + 0.5p_{t+\tau} - p_t p_{t+\tau}}{\sqrt{p_t(1-p_t)}\sqrt{p_{t+\tau}(1-p_{t+\tau})}} - \frac{T(c_t, a_1) + T(c_{t+\tau}, a_2)}{\sqrt{p_t(1-p_t)}\sqrt{p_{t+\tau}(1-p_{t+\tau})}}, \quad (3.39)$$

где $T(c, a)$ - функция Оуэна [39]

$$T(c, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a e^{-\frac{1}{2}c^2(1+u^2)} \frac{du}{1+u^2}, \quad (3.40)$$

$$a_1 = \frac{c_{t+\tau} - g_{ll;t,t+\tau} c_t}{c_t \sqrt{1 - g_{ll;t,t+\tau}^2}}, \quad a_2 = \frac{c_t - g_{ll;t,t+\tau} c_{t+\tau}}{c_{t+\tau} \sqrt{1 - g_{ll;t,t+\tau}^2}}. \quad (3.41)$$

Отметим, что приведенные соотношения справедливы при значениях вероятностей $p_t \geq 0.5, p_{t+\tau} \geq 0.5$ и при $p_t \leq 0.5, p_{t+\tau} \leq 0.5$, характерных для рассматриваемых здесь рядов, более общие соотношения приведены в работе [17].

И, наконец, уравнение, связывающее функцию $r_{kl;t,t+\tau}$ с функцией $g_{kl;t,t+\tau}$ имеет вид

$$r_{kl;t,t+\tau} = \frac{[\theta_{kt} \sigma_{kt}^{(1)} + (1 - \theta_{kt}) \sigma_{kt}^{(2)}] g_{kl;t,t+\tau}}{S_{kt} S_{lt}} \exp\left(-\frac{c_{lt+\tau}^2}{2}\right) \quad (3.42)$$

$$S_{kt} = \sqrt{\theta_{kt}[(\sigma_{kt}^{(1)})^2 + (\mu_{kt}^{(1)} - \mu_{kt})^2] + (1 - \theta_{kt})[(\sigma_{kt}^{(2)})^2 + (\mu_{kt}^{(2)} - \mu_{kt})^2]}$$

$$S_{lt} = \sqrt{p_{lt+\tau}(1 - p_{lt+\tau})}$$

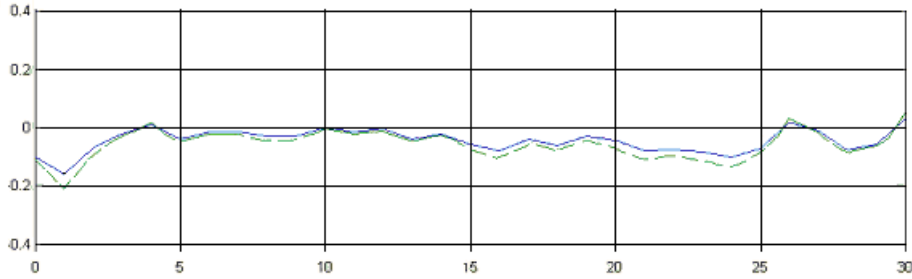


Рис. 3.5: Взаимные корреляционные функции среднесуточной температуры воздуха и индикаторного ряда осадков, вычисленные по реальным (сплошная линия) и по модельным данным (пунктирная линия).

Комплексы с большим числом временных рядов строятся аналогично.

3.3 Моделирование условно распределенных гауссовских процессов и полей дискретного аргумента. Стохастическое восполнение гауссовских стационарных процессов и однородных полей

Метод условных распределений позволяют моделировать важный для гидрометеорологических приложений класс случайных векторов, некоторое множество компонентов которых принимают фиксированные значения. Алгоритмы из предыдущих глав данной работы, построенные на основе метода условных распределений, позволяют автоматически строить реализации гауссовских процессов, при условии, что в начальных k точках значения процесса фиксированы. Если значения процесса фиксированы в некотором множестве точек, которые не являются начальными, то для моделирования условных реализаций алгоритмы требуют соответствующей модификации. Один из таких способов моделирования условных реализаций случайных гауссовских процессов и полей рассмотрен в работах [9,28], а также для спектральных моделей С.М. Пригариным в работе [32].

В этом разделе будут рассмотрены некоторые приемы моделирования реализаций условно распределенных стационарных процессов и однородных случайных полей с использованием рассмотренных в двух предыдущих главах алгоритмов.

3.3.1 Рекурсивные алгоритмы моделирования реализаций условно распределенных стационарных процессов.

Пусть ξ_t , $t = 1, 1 + 1/2, 2, 2 + 1/2, \dots, n$ - стационарная гауссовская последовательность ограниченной длины или вектор

$$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_{1+1/2}, \dots, \xi_{(n-1)+1/2}, \xi_n)^T \quad (3.43)$$

с нулевым средним и теплицевой корреляционной матрицей вида

$$R = \begin{vmatrix} 1 & r_{1/2} & r_1 & r_{1+1/2} & \dots & r_{n-1} \\ r_{1/2} & 1 & r_{1/2} & r_1 & \dots & r_{n-1-1/2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n-1} & r_{n-1-1/2} & \dots & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad (3.44)$$

Рассматривается задача интерполяции последовательности ξ_t в точки $t = 1 + 1/2, 2 + 1/2, \dots, (n - 1) + 1/2$ при условии, что в точках $t = 1, 2, \dots, n$ значения процесса фиксированы. Разобьем вектор $\vec{\xi}$ на два подвектора

$$\vec{\xi}_1 = (\xi_{1+1/2}, \dots, \xi_{(n-1)+1/2})^T, \quad \vec{\xi}_2 = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T. \quad (3.45)$$

Соответствующие корреляционные матрицы векторов $\vec{\xi}_1$ и $\vec{\xi}_2$ имеют вид:

$$R_{11} = \begin{vmatrix} 1 & r_1 & \dots & r_{n-2} \\ r_1 & 1 & \dots & r_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n-2} & r_{n-3} & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad R_{22} = \begin{vmatrix} 1 & r_1 & \dots & r_{n-1} \\ r_1 & 1 & \dots & r_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n-1} & r_{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad (3.46)$$

Взаимная корреляционная матрица векторов $\vec{\xi}_1$ и $\vec{\xi}_2$ $R_{12} = M\vec{\xi}_1\vec{\xi}_2^T$ размерности $n \times (n - 1)$ имеет вид

$$R_{12} = \begin{vmatrix} r_{1/2} & r_{1/2} & r_{1+1/2} & \dots & r_{(n-2)+1/2} \\ r_{1+1/2} & r_{1/2} & r_{1/2} & \dots & r_{(n-3)+1/2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{(n-2)+1/2} & r_{(n-3)+1/2} & \dots & \dots & r_{1/2} \end{vmatrix}, \quad (3.47)$$

Если нормальные векторы $\vec{\xi}_1$ и $\vec{\xi}_2$ в совокупности образуют вектор $\vec{\xi} = (\vec{\xi}_1^T, \vec{\xi}_2^T)^T$ со средним

$$M\vec{\xi} = \vec{\mu} = (\vec{\mu}_1^T, \vec{\mu}_2^T)^T$$

и совместной ковариационной матрицей

$$R = M(\vec{\xi} - \vec{\mu})(\vec{\xi} - \vec{\mu})^T = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} M\vec{\xi}_1 &= \vec{\mu}_1, & M\vec{\xi}_2 &= \vec{\mu}_2, \\ R_{11} &= M(\vec{\xi}_1 - \vec{\mu}_1)(\vec{\xi}_1 - \vec{\mu}_1)^T, & R_{21}^T &= R_{12} = M(\vec{\xi}_1 - \vec{\mu}_1)(\vec{\xi}_2 - \vec{\mu}_2)^T, \\ R_{22} &= M(\vec{\xi}_2 - \vec{\mu}_2)(\vec{\xi}_2 - \vec{\mu}_2)^T, \end{aligned}$$

то вектор $\vec{\xi}_1$ при заданном $\vec{\xi}_2$ строится в соответствии с (2.9) в виде

$$\vec{\xi}_1 = \vec{\mu}_1 + R_{12}R_{22}^{-1}(\vec{\xi}_2 - \vec{\mu}_2) + A_1\vec{\varphi}_1, \quad (3.48)$$

где $\vec{\varphi}_1 = (\varphi_{q+1}, \dots, \varphi_n)^T$ - независимые между собой и от $\vec{\xi}_2$ нормальные случайные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями, а нижняя треугольная матрица A_1 такая, что

$$A_1A_1^T = R_{11.2} = R_{11} - R_{12}R_{22}^{-1}R_{21}. \quad (3.49)$$

При реализации алгоритма (3.48) необходимо вычисление остаточной ковариационной матрицы $R_{11.2}$ с последующим разложением ее на произведение двух треугольных, что требует трудоемких вычислений, если размерность соответствующих матриц велика.

Рассмотрим следующую модификацию алгоритма (3.48). Поскольку вектор $\vec{\xi}$ имеет совместную корреляционную матрицу R , а $A_1\vec{\varphi}_1$ в (3.48) не зависит от $R_{12}R_{22}^{-1}\vec{\xi}_2$, то разложение (3.49) можно обойти, если воспользоваться следующим известным свойством нормального распределения (см., например, [1])

Пусть вектор

$$\begin{aligned}\vec{\zeta} &= (\zeta_1, \dots, \zeta_n)^T = (\vec{\zeta}_1^T, \vec{\zeta}_2^T)^T, \\ \vec{\zeta}_1 &= (\zeta_1, \dots, \zeta_q)^T, \quad \vec{\zeta}_2 = (\zeta_{q+1}, \dots, \zeta_n)^T\end{aligned}$$

распределен нормально с нулевым средним и совместной ковариационной матрицей

$$R = M\vec{\zeta}\vec{\zeta}^T = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix},$$

где $\vec{\zeta}_1$ и $\vec{\zeta}_2$ -векторы с нулевыми средними и ковариационными матрицами $R_{11} = M\vec{\zeta}_1\vec{\zeta}_1^T$, $R_{12} = M\vec{\zeta}_1\vec{\zeta}_2^T$, $R_{22} = M\vec{\zeta}_2\vec{\zeta}_2^T$. Если R_{22} - не вырождена, то вектор

$$\vec{\eta} = \vec{\zeta}_1 - R_{12}R_{22}^{-1}\vec{\zeta}_2 \quad (3.50)$$

распределен нормально с нулевым средним и ковариационной матрицей $M\vec{\eta}\vec{\eta}^T = R_{11.2}$ вида (3.49). Действительно [33]

$$\begin{aligned}& M(\vec{\zeta}_1 - R_{12}R_{22}^{-1}\vec{\zeta}_2)(\vec{\zeta}_1 - R_{12}R_{22}^{-1}\vec{\zeta}_2)^T = \\ &= M\vec{\zeta}_1\vec{\zeta}_1^T - R_{12}R_{22}^{-1}M\vec{\zeta}_1\vec{\zeta}_2^T - R_{12}R_{22}^{-1}M\vec{\zeta}_2\vec{\zeta}_1^T + \\ &+ R_{12}R_{22}^{-1}M\vec{\zeta}_2\vec{\zeta}_2^T R_{22}^{-1}R_{21} = \\ &= R_{11} - R_{12}R_{22}^{-1}R_{21}.\end{aligned}$$

Для моделирования реализаций условно распределенного вектора $\vec{\xi}$ вида (3.43) при фиксированных $\vec{\xi}_2$ из (3.45) будут использованы соотношения (3.48), (3.50).

В соответствии с (3.48) вектор $\vec{\xi}_1$ при заданном $\vec{\xi}_2$ строится с помощью преобразования

$$\vec{\xi}_1 = R_{12}R_{22}^{-1}\vec{\xi}_2 + A_1\vec{\varphi}_1, \quad (3.51)$$

где $\vec{\varphi}_1 = (\varphi_1, \dots, \varphi_q)^T$ - вектор, составленный из независимых нормальных величин с нулевым средним и единичной дисперсией, R_{11}, R_{12}, R_{22} являются подблоками матрицы R (3.44) и имеют вид

(3.46), (3.47). Поскольку вектор $\vec{\xi}$ имеет совместную корреляционную матрицу R , а $A_1\vec{\varphi}_1$ в (3.51) не зависит от $R_{12}R_{22}^{-1}\vec{\xi}_2$, то $\vec{\xi}_1$ с учетом (3.50) можно представить в виде [9]

$$\vec{\xi}_1 = R_{12}R_{22}^{-1}\vec{\xi}_2 + \vec{\eta}_1 - R_{12}R_{22}^{-1}\vec{\eta}_2, \quad (3.52)$$

где векторы

$$\vec{\eta}_1 = (\eta_{1+1/2}, \eta_{2+1/2}, \dots, \eta_{(n-1)+1/2})^T, \quad \vec{\eta}_2 = (\eta_1, \dots, \eta_n)^T \quad (3.53)$$

с корреляционными матрицами R_{11} и R_{22} такие, что вектор

$$\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_{1+1/2}, \dots, \eta_{(n-1)+1/2}, \eta_n)^T$$

распределен нормально с нулевым средним, корреляционной матрицей (3.43) и не зависит от $\vec{\xi}$.

Таким образом представление (3.52) эквивалентно представлению (3.48).

Запишем выражение (3.52) в тождественном виде

$$\vec{\xi}_1 = R_{12}R_{22}^{-1}(\vec{\xi}_2 - \vec{\eta}_2) + \vec{\eta}_1. \quad (3.54)$$

Тогда алгоритм для интерполяции вектора $\vec{\xi}_2$ в точки $t = 1 + 1/2, \dots, (n-1) + 1/2$ осуществляется в виде следующих преобразований:

(1а) Независимо от $\vec{\xi}$ моделируется нормальный вектор $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_{1+1/2}, \dots, \eta_{(n-1)+1/2}, \eta_n)^T$ с нулевым средним и корреляционной матрицей R вида (3.44).

(2а) Векторы $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ разбиваются на подвекторы вида (3.45), (3.53) соответственно и вектор $\vec{\xi}_1$ при фиксированном $\vec{\xi}_2$ строится с помощью преобразования (3.54).

Поскольку корреляционная матрица R - теплицева, то преобразование (3.54) можно представить в рекуррентном виде: для этого

в пункте (1а) алгоритма (1а)-(2а) надо воспользоваться рекурсивной процедурой (3.4)-(3.5) для моделирования гауссовских векторов с корреляционными матрицами теплицева вида.

Вектор $\vec{\eta}$ с корреляционной матрицей (3.43) строится по схеме (3.4)-(3.5). Для реализации преобразования (3.54) этот вектор необходимо разбить на два подвектора $\vec{\eta}_1$ и $\vec{\eta}_2$, определенные выше. Остается умножить вектор $\vec{\xi}_2 - \vec{\eta}_2 = \vec{x}$ на матрицу регрессии $R_{12}R_{22}^{-1}$ и сложить результат с вектором $\vec{\eta}_1$. Специфика матриц R_{12} и R_{22} позволяет сделать это рекурсивно. Рассмотрим сначала произведение $R_{22}^{-1}\vec{x}$. Матрица R_{22} - теплицева корреляционная матрица, поэтому для удобства будем вместо R_{22} использовать обозначение R_n , как в (3.2).

Из (1.33) следует, что

$$R_n^{-1} = B_n^T D_n^{-1} B_n,$$

где матрицы B_n и D_n имеют вид (3.7) и (3.8). Отметим, что для обращения матрицы R_n нам необходима матрица B_n , а ее строки рекурсивно вычисляются по формулам (3.5). Рассмотрим матрицы

$$D_n^{-1} B_n = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ -\vec{b}^T[1]J_{(3.27)}/d_1^2 \quad 1/d_1^2 \\ -\vec{b}^T[2]/J_{(3.28)}d_1^2 \quad 1/d_1^2 \\ \dots \\ -\vec{b}^T[n-1]J_{(n-1)}/d_{(n-1)}^2 \quad 1/d_1^2 \end{array} \right\|,$$

$$B_n^T = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & -J_{(3.27)}\vec{b}[1] & -J_{(3.28)}\vec{b}[2] & \dots & -J_{(n-1)}\vec{b}[n-1] \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right\|,$$

и введем обозначения:

$$\vec{x}_k = (x_1, \dots, x_k)^T, \quad \vec{y}_k = (y_1, \dots, y_k)^T, \quad \vec{z}_k = (z_1, \dots, z_k)^T.$$

По мере вычисления d_k^2 и $\vec{b}[k]$ по схеме (3.5) для матрицы R_n вычисление $\vec{z}_n = B_n^T D_n^{-1} B_n \vec{x}_n$ осуществляются последовательно по схеме:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, & \vec{z}_1 &= y_1 \\ y_2 &= \frac{x_2 - \vec{b}^T[1]J_1 \vec{x}_1}{d_1^2}, & \vec{z}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{z}_1 - \vec{b}[1]y_2 \\ y_2 \end{vmatrix} \\ & \dots & & \dots \\ y_n &= \frac{x_n - \vec{b}^T[n-1]J_{n-1} \vec{x}_{n-1}}{d_{n-1}^2}, & \vec{z}_n &= \begin{vmatrix} \vec{z}_{n-1} - \vec{b}[n-1]y_n \\ y_n \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Остается умножить вектор \vec{z}_n на матрицу R_{12} :

$$R_{12} R_{22}^{-1} \vec{x}_n = R_{12} \vec{z}_n.$$

Положим

$$\vec{r}_k^T[n] = (\vec{p}^T[k]J_k, \vec{p}^T[n-k]), \quad k = 1, \dots, n-1$$

и запишем матрицу R_{12} в виде

$$R_{12} = \begin{vmatrix} \vec{r}_1^T[n] \\ \vec{r}_2^T[n] \\ \dots \\ \vec{r}_{n-1}^T[n] \end{vmatrix},$$

где $\vec{p}^T[k]$ - вектор-строка размерности k вида

$$\vec{p}^T[k] = (r_{0+1/2}, r_{1+1/2}, \dots, r_{(k-1)+1/2}), \quad (3.56)$$

а J_k - матрица перестановок размерности $k \times k$ вида (3.10). При вычислении $R_{12}\vec{z}$ требуется стандартное число операций, необходимое для умножения вектора на матрицу, но объем памяти для хранения матрицы R_{12} с учетом (3.56) определяется максимальной размерностью вектора $\vec{p}^T[k]$ при $k = n-1$. окончательным результатом является вектор (3.54).

Рассмотренная процедура является частным случаем более общей процедуры моделирования условных реализаций вектора $\vec{\xi}$ вида

$$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_{1+1/p}, \dots, \xi_{1+(p-1)/p}, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \xi_{n-1+1/p}, \dots, \xi_{n-1+(p-1)/p}, \xi_n)^T,$$

$$\begin{aligned}\vec{\xi}_1 &= (\xi_{1+1/p}, \dots, \xi_{1+(p-1)/p}, \dots, \xi_{n-1+1/p}, \dots, \xi_{n-1+(p-1)/p}, \xi_n)^T, \\ \vec{\xi}_2 &= (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T,\end{aligned}\tag{3.57}$$

при фиксированных значениях $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. В этом случае также считается, что корреляционная матрица $M\vec{\xi}\vec{\xi}^T$ вектора (6.15) - теплицева и определяется своей первой строкой

$$\begin{aligned}(r_0, r_{0+1/p}, \dots, r_{0+(p-1)/p}, r_1, \dots, r_{1+(p-1)/p}, r_2, \dots, \\ \dots, r_{n-2+1/p}, \dots, r_{n-2+(p-1)/p}, r_{n-1})^T,\end{aligned}\tag{3.58}$$

которая при $p=2$ совпадает с первой строкой матрицы (3.43).

Процедура моделирования условных реализаций вектора (6.15) с использованием соотношения (3.54) принципиально не отличается от предыдущей, поскольку построение вектора \vec{z}_n осуществляется с помощью тех же формул (3.55) и при тех же самых размерностях векторов \vec{x}_n, \vec{y}_n , только векторы $\vec{\xi}_i$ и $\vec{\eta}_i$ моделируются с корреляционной матрицей, которая в данном случае определяется строкой (3.58), а их разбиение на подвекторы производится в соответствии с (3.57).

Основное различие состоит в последней операции умножения вектора \vec{z}_n на матрицу R_{12} . Матрица R_{12} в данном случае - блочная и имеет вид

$$R_{12} = \left\| \begin{array}{c} R_1[n] \\ R_2[n] \\ \dots\dots\dots \\ R_{n-1}[n] \end{array} \right\|,\tag{3.59}$$

где $R_k[n]$ - блоки размерности $(p-1) \times n$, которые можно представить в виде

$$\begin{aligned}R_k[n] &= \\ &= \left\| \begin{array}{cccc} r_{k-(p-1)/p} & r_{k-1-(p-1)/p} & \dots & r_{0+(p-1)/p} & \dots & r_{n-k-1+(p-1)/p} \\ r_{k-(p-2)/p} & r_{k-1-(p-2)/p} & \dots & r_{0+(p-2)/p} & \dots & r_{n-k-1+(p-2)/p} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ r_{k-1/p} & r_{k-1-1/p} & \dots & r_{0+1/p} & \dots & r_{n-k-1+1/p} \end{array} \right\|,\end{aligned}$$

Тогда в скалярной записи компоненты вектора $\vec{\xi}_1 = R_{12}\vec{z}_n$ вычисляются по формуле

$$\xi_{k+i/p} = \sum_{j=1}^{k+1} r_{|k+1-j|-(p-i)/p} z_j + \sum_{j=k+2}^n r_{|k+1-j|-(p-i)/p} z_j, \quad (3.60)$$

$$k = 1, \dots, n-1, \quad i = 1, \dots, p-1,$$

где r_{h+q} , $h = 0, \dots, n-2$, $q = 1/p, \dots, (p-1)/p$ - элементы первой строки (3.58) корреляционной матрицы вектора $\vec{\xi}$, причем для выбора элементов r_{s-1} первой суммы в (3.60) из строки (3.58), где $s = 1, \dots, n-1$, $l = 1/p, \dots, (p-1)/p$, можно воспользоваться тождеством $r_{s-1} = r_{s-1+(1-l)}$.

Рассмотренные алгоритмы по существу являются алгоритмами моделирования ошибок оптимальной интерполяции гауссовских стационарных процессов с узлов редкой регулярной сетки в узлы более густой сетки. Обобщение на случай негауссовских процессов может быть сделано на основе метода "обратных функций" [32].

3.3.2 Моделирование условных полей метеоэлементов для задач динамико-вероятностного моделирования атмосферных процессов

Рассмотрим некоторые вопросы использования метода условных распределений и соответствующих алгоритмов моделирования гауссовских последовательностей для решения прикладных задач гидрометеорологии. Одной из задач, для которых применение этого метода оказывается в достаточной степени естественным, является задача, связанная с исследованием влияния неопределенности в начальных данных на точность математического моделирования атмосферных процессов. Эта задача рассматривалась в работе [26], в которой на основе простой баротропной модели исследовалась временная зависимость дисперсий ошибок интерполяции начального поля геопотенциала со станций в узлы регулярной сетки.

Если задан только вектор

$$\vec{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_k)^T$$

метеоэлементов в k пунктах наблюдений, то в начальный момент времени мы имеем в n узлах регулярной сетки, строго говоря, не одно единственное значение вектора

$$\vec{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)^T,$$

а целый ансамбль X^0 возможных его значений, распределенных с условной плотностью вероятности $W_0(\vec{x}^0|\vec{\psi})$. Решая на интервале времени $[t_0, t]$ ту или иную прогностическую систему уравнений для каждой точки этого ансамбля, получим соответствующий ансамбль X^t прогностических векторов

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T,$$

распределенных с условной плотностью вероятности $W_t(\vec{x}|\vec{\psi})$. Наиболее полной формулировкой прогноза как раз является задание плотности вероятности $W_t(\vec{x}|\vec{\psi})$. Ясно, однако, что вычисление этой плотности для нелинейных систем прогностических уравнений - задача большой сложности. Но если бы даже функция $W_t(\vec{x}|\vec{\psi})$ была вычислена, все равно для многих приложений интерес представлял бы категорический прогноз, т.е. только одно значение вектора \vec{x} из ансамбля X^t .

Выбор такого вектора может быть основан на различных критериях, например как предложено В.И. Татарским [41], на основе требования, чтобы плотность вероятности $W_t(\vec{x}|\vec{\psi})$ была максимальна. Более общий подход состоит в выборе точки $\vec{z} \in X^t$ из условия минимума среднего квадрата разности между \vec{z} и случайным вектором \vec{x} . Требуемый минимум достигается, если \vec{z} совпадает с условным математическим ожиданием вектора \vec{x} при заданных $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k$. Используя метод Е.С. Эпштейна [16] в этой ситуации, можно показать, что с точностью до моментов второго порядка система уравнений для условных средних значений μ_i и условных ковариаций σ_{ij}

применительно к прогностическим уравнениям типа

$$\dot{x}_i = a_{ik}x_k + b_{ikm}x_jx_m, \quad i = \overline{1, n}, \quad x_i|_{t=t_0} = x_i^0 \quad (3.61)$$

будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_i &= a_{ik}\mu_k + b_{ikm}(\mu_k\mu_m + \sigma_{km}), \\ \dot{\sigma}_{ij} &= a_{ik}\sigma_{jk} + b_{ikm}(\sigma_{jk}\mu_m + \sigma_{jm}\mu_k) + \\ &\quad + a_{ik}\sigma_{ik} + b_{jkm}(\sigma_{ik}\mu_m + \sigma_{im}\mu_k), \\ i, j &= \overline{1, n}, \quad \mu_i|_{t=t_0} = \mu_i^0, \quad \sigma_{ij}|_{t=t_0} = \sigma_{ij}^0. \end{aligned} \quad (3.62)$$

В случае когда уравнение (3.61) является уравнением вихря, x_i обозначает геопотенциал Φ_i в i -м узле регулярной сетки, a_{ik} и b_{ikm} - известные коэффициенты; точки над переменными в левых частях уравнений (3.61) и (3.62) обозначают дифференцирование по времени. По повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до n .

Система уравнений (3.62) в принципе может быть решена на ЭВМ достаточно большого быстродействия. По трудоемкости задача примерно эквивалентна решению $1+n/2$ систем уравнений (3.61). Но если даже не считаться с трудоемкостью этой задачи, следует помнить об искусственном способе ее замыкания - обстоятельство, которое, по-видимому, с увеличением заблаговременности прогноза будет проявляться более неприятным образом.

Возможен принципиально другой метод вычисления условных средних значений и ковариаций, характеризующих оптимальный прогноз (отметим, что, как это показал А.С. Марченко [19], условное среднее значение является оптимальным в среднем- квадратическом смысле прогнозом независимо от того, какая конкретно прогностическая задача решается).

Суть этого метода состоит в моделировании ансамбля начальных случайных векторов $\bar{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)^T$ при одних и тех же фиксированных значениях метеорологических элементов $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k$ в пунктах наблюдений, решении прогностической задачи типа (3.61)

для каждого элемента ансамбля и последующей статистической обработке ансамбля прогностических векторов. Во многих случаях усреднение по нескольким десяткам независимых прогностических векторов приводит к достаточно устойчивым в статистическом смысле условным средним значениям и ковариациям, так что практически приемлемые результаты можно получить со значительно меньшими затратами машинного времени, нежели при численном решении системы уравнений (3.62). Кроме того, реализация этого метода не связана с проблемой замыкания системы уравнений для условных моментов распределения.

Пусть для простоты $W_0(\vec{x}^0|\vec{\psi})$ - нормальная плотность вероятности, которая определяется двумя параметрами - вектором условных средних значений $\vec{\mu}^0$, линейно зависящим от $\vec{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_k)^T$, и условной ковариационной матрицей $R_{11.2} = R_{11} - R_{12}R_{22}^{-1}R_{21}$, где R_{11} - ковариационная матрица вектора \vec{x}^0 , R_{22} - ковариационная матрица вектора $\vec{\psi}$, $R_{12} = R_{21}^T$ - взаимная ковариационная матрица. Случайный вектор \vec{x}^0 , распределенный с нормальной плотностью вероятности $W_0(\vec{x}^0|\vec{\psi})$, можно моделировать с помощью приема, рассмотренного в предыдущем параграфе [30].

В соотношении (3.54) используются матрицы R_{12} и R_{22} с теплицевой структурой, что позволяет строить рекурсивный алгоритм моделирования соответствующих условных реализаций. В данной задаче из-за нерегулярности сети метеорологических станций матрицы R_{12} и R_{22} не являются теплицевыми, при этом для задач типа (3.62) размерности этих матриц для реальной сети станций и стандартной сетки для решения рассматриваемых конечно-разностных уравнений достаточно велики, поэтому в данном случае возможно лишь приближенное решение задачи.

Запишем преобразование (3.48) с использованием (3.50) в виде

$$\vec{\xi}_1 = \vec{\mu}_1 + R_{12}R_{22}^{-1}(\vec{\xi}_2 - \vec{\mu}_2) + \vec{\eta}, \quad (3.63)$$

$$\vec{\eta} = \vec{\zeta}_1 - R_{12}R_{22}^{-1}\vec{\zeta}_2, \quad (3.64)$$

в котором использованы обозначения, связанные с преобразованием (3.48), (3.50) из предыдущего параграфа. В этом случае вектор $\vec{\xi}_1$ моделируется с помощью процедуры, аналогичной (1a)-(2a):

(1b) Пусть $\vec{\xi}$ - нормальный вектор со средним $M\vec{\xi} = \vec{\mu} = (\vec{\mu}_1^T, \vec{\mu}_2^T)^T$ и ковариационной матрицей

$$R = M(\vec{\xi} - \vec{\mu})(\vec{\xi} - \vec{\mu})^T = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}. \quad (3.65)$$

Независимо от $\vec{\xi}$ моделируется вектор

$$\vec{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)^T = (\zeta_1^T, \zeta_2^T)^T$$

с нулевым средним и ковариационной матрицей (3.65).

(2b) В результате преобразования (3.64) получаем независимый от $\vec{\xi}_2$ вектор $\vec{\eta}$ с ковариационной матрицей $R_{11.2}$ вида 6.7).

(3b) Вектор $\vec{\xi}_1$ строится с помощью преобразования (3.63).

Таким образом, моделирование вектора $\vec{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)^T$ значений поля в узлах регулярной сетки (в дальнейшем ее будем называть основной) при фиксированных значениях на станциях $\vec{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_k)^T$ осуществляется с помощью процедуры (1b)- (3b), согласно которой первое слагаемое в (3.63) в соответствующих обозначениях принимает вид $\vec{\mu}^0 = \vec{\mu}_1 + R_{12}R_{22}^{-1}(\vec{\psi} - \vec{\mu}_2)$ и представляет собой вектор условных средних в узлах регулярной сетки при фиксированном векторе $\vec{\psi}$ на станциях. Здесь $\vec{\mu}_1 = M\vec{x}^0$, $\vec{\mu}_2 = M\vec{\psi}$ - безусловные средние поля в узлах регулярной сетки и на станциях. Второе слагаемое в (3.63) - это вектор $\vec{\eta}$ с условной ковариационной матрицей $R_{11.2}$ размерности, равной числу узлов сетки.

Для реализации процедуры (1b)-(3b) необходимо уметь моделировать вектор $\vec{\zeta} = (\zeta_1^T, \zeta_2^T)^T$ с заданной совместной ковариационной матрицей (3.63), блоки R_{11} которой являются ковариационными матрицами поля в узлах основной регулярной сетки, блоки R_{22}

- ковариационными матрицам поля в узлах нерегулярной сетки, соответствующей сети станций, R_{12} и R_{21} - взаимные ковариационные матрицы. Если ковариационная функция поля задана аналитическим выражением, то моделирование такого вектора не представляет принципиальных трудностей. Для этой цели могут подойти, например, приближенные спектральные модели гауссовских случайных полей [32], однако в данном случае использовался другой приближенный способ моделирования вектора $\vec{\zeta} = (\vec{\zeta}_1^T, \vec{\zeta}_2^T)^T$, основанный на алгоритмах и методах регуляризации, рассмотренных в предыдущих параграфах.

Было использовано одно из наиболее известных [8] представлений корреляционной функции однородного изотропного поля геопотенциала

$$\begin{aligned} & \chi_{11}, \chi_{12}, \dots, \chi_{1n} \\ & \chi_{21}, \chi_{22}, \dots, \chi_{2n} \\ & \dots\dots\dots \\ & \chi_{m1}, \chi_{m2}, \dots, \chi_{mn} \end{aligned} \quad (3.66)$$

на уровне 500 мб в виде

$$r_{ij,kl} = r_{hq} = \exp(-\alpha\rho_{hq}^2) = \exp(-\alpha\rho_h^2) \exp(-\alpha\rho_q^2) = r_h r_q \quad (3.67)$$

где α - параметр, обратно пропорциональный радиусу корреляции, $\rho_{hq} = (h^2\Delta x^2 + q^2\Delta y^2)^{1/2}$, $h = k - i$, $q = l - j$ - расстояние между узлами с индексами ij и kl , ρ_h и ρ_q - расстояния между узлами по осям x и y . Значения параметра приведены в [8].

Для построения поля (3.66) использовался хорошо известный прием моделирования случайных полей (так называемый метод "по строкам и столбцам") [15,27], в соответствии с которым поле (3.66) на равномерной сетке с числом узлов $m \times n$ строится в два этапа:

Сначала строится последовательность независимых нормальных векторов-столбцов $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \dots, \vec{\varphi}_n$ с нулевым средним и одной и той

же корреляционной функцией r_q (или поле)

$$\begin{array}{c} \varphi_{11}, \varphi_{12}, \dots, \varphi_{1n} \\ \varphi_{21}, \varphi_{22}, \dots, \varphi_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_{m1}, \varphi_{m2}, \dots, \varphi_{mn} \end{array}$$

элементы строк которого - независимые нормальные величины с нулевым средним и единичной дисперсией.

Далее для каждой строки применяется одно и то же линейное преобразование $(\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{in})A = (\chi_{i1}, \chi_{i2}, \dots, \chi_{in})$, $i = 1, \dots, m$ такое, чтобы последовательности $\chi_{i1}, \chi_{i2}, \dots, \chi_{in}$ имели одну и ту же корреляционную функцию r_h . Полученное в результате этих преобразований однородное изотропное гауссовское поле (3.66) имеет корреляционную функцию (3.67).

Для реализации метода моделирования условных полей \vec{x}^0 поле (7.8) используется в качестве исходного, а соответствующий алгоритм сводится к следующим преобразованиям:

(1с) Строится однородное изотропное дискретное гауссовское поле (3.66) с корреляционной функцией (3.67) на вспомогательной равномерной сетке с достаточно небольшим шагом $\Delta x = \Delta y$.

(2с) Путем экстраполяции с одного из ближайших узлов вспомогательной сетки в находящиеся внутри ячейки сетки пункты наблюдений для каждой реализации поля (3.66) находятся значения вектора $\vec{\zeta} = (\vec{\zeta}_1^T, \vec{\zeta}_2^T)^T$ в узлах основной сетки и на станциях. При этом шаг вспомогательной сетки поля (3.66) удобно выбирать с таким расчетом, чтобы узлы основной сетки для вектора (или поля) $\vec{\zeta}_1$ совпадали с соответствующими узлами поля (3.66).

(3с) Вектор $\vec{\zeta}_2$ используется для построения в узлах основной сетки поля $R_{12}R_{22}^{-1}\vec{\zeta}_2$, которое фигурирует в выражении (3.64), по методу оптимального объективного анализа [39,40] с применением корреляционной функции (3.67). И, наконец разность $\vec{\eta} = \vec{\zeta}_1 - R_{12}R_{22}^{-1}\vec{\zeta}_2$

(3.64), умноженная на соответствующее стандартное отклонение поля геопотенциала σ_0 дает искомый нормальный вектор $\vec{\eta}$ с нулевым средним и ковариационной матрицей, близкой к $R_{11.2}$ вида (3.49).

(4с) Вектор $\vec{\mu}^0 = \vec{\mu}_1 + R_{12}R_{22}^{-1}(\vec{\psi} - \vec{\mu}_2)$ вычисляется в узлах основной сетки методом оптимальной интерполяции по фактическим данным в пунктах наблюдений.

Отметим, что для реализации рассмотренного алгоритма необходимо строить пространственное гауссовское поле на вспомогательной сетке с большим числом узлов. Для этой цели использовались алгоритмы и методы регуляризации из предыдущих параграфов.

В качестве прогностической системы уравнений использовался конечно-разностный аналог уравнения вихря. Прогноз АТ-500 на 48 ч вычислялся на ограниченной территории 22×26 узлов с пространственным шагом 300 км. В качестве фоновых использовались поля геопотенциала, полученные методом линейной оптимальной интерполяции по данным на 235 станциях для двух синоптических ситуаций, отражающих различные метеорологические процессы. В качестве первой была использована ситуация за 1.XII.1970 г., характеризующая резко выраженным меридиональным переносом и мощными циклоническими образованиями. Вторая ситуация за 27.III.1965 г. характеризуется резко выраженным западным переносом, причем барические образования выражены слабо.

Ансамбль начальных значений состоял из 100 независимых реализаций вектора \vec{x}^0 . Прогностические условные средние значения $\mu(t)$, а также среднеквадратические отклонения $\sigma(t)$ от $\mu(t)$ вычислялись в каждом узле сетки для моментов времени 0, 12, 24, 36 и 48 ч. Зависимость от заблаговременности прогноза усредненных по узлам сетки среднеквадратических отклонений $\sigma(t)$ для этих двух синоптических ситуаций приведена на Рис. 3.6. Следует отметить, что для ситуации со слабо выраженными барическими образованиями рост среднеквадратических отклонений $\sigma(t)$ во времени заметно меньше, чем для ситуации с резко выраженными барическими

образованиями. Изучался также вопрос об устойчивости условных

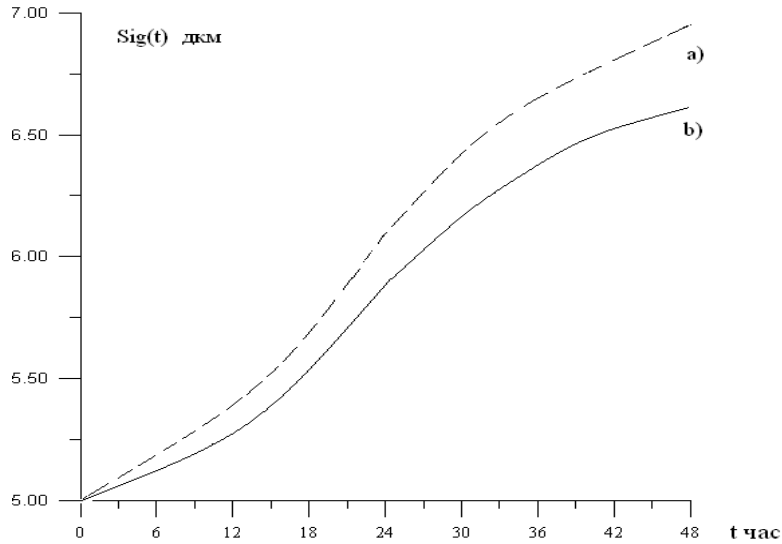


Рис. 3.6: Зависимость усредненных по узлам сетки среднеквадратических отклонений $\sigma(t)$ от заблаговременности прогноза для двух синоптических ситуаций: а) 1.XII.1970 г., б) 27.III 1965 г.

средних значений и условных ковариаций в зависимости от числа реализаций N начального вектора \vec{x}^0 . Обнаружено, что для $N > 50$ дальнейшее увеличение числа реализаций практически не влияет на поведение этих статистических характеристик (имеются в виду усредненные по всем узлам сетки значения). Для получения устойчивых статистических характеристик в каждом узле сетки требуется, конечно, несколько большее число реализаций - порядка 150.

Отметим, что существует достаточно много методов объединения динамических и вероятностных моделей атмосферных процессов. Один из них основан на вариационном согласовании стохастических и гидротермодинамических моделей пространственно-временных атмосферных полей [30].

3.4 Некоторые классы кусочно-постоянных негауссовских случайных процессов и полей. Примеры использования

В данном разделе рассматриваются модели стационарных в широком смысле кусочно-постоянных случайных процессов, основанных на использовании различных классов точечных потоков. Эти модели являются модификацией известных моделей стационарных в широком смысле процессов и однородных и изотропных полей на потоках Пальма, рассмотренных в работе [24]. Для построения процессов и полей наряду с потоками Пальма и пуассоновскими потоками используются также регулярные точечные потоки [5].

3.4.1 Численные стохастические модели негауссовских процессов на потоках Пальма

Рассматриваются стационарные потоки точек вида

$$\tau_k = \sum_{i=1}^k \eta_i, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \tau_0 = 0,$$

где η_i независимые неотрицательные случайные величины, распределенные с плотностями

$$f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots,$$

Для стационарного потока $f_i(x)$ удовлетворяют условиям

$$f_i(x) = f(x) = F'(x), \quad i = 2, 3, \dots, \quad \int_0^{\infty} x f(x) dx < \infty,$$
$$f_1(x) = \frac{1 - F(x)}{\int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx}. \quad (3.68)$$

Обозначим через $v_0(t)$ вероятность того, что в интервал $(0, t)$ не попало ни одной точки потока τ_k . Тогда

$$\begin{aligned} v_0(t) &= \int_t^\infty f_1(x) dx = \frac{1}{\int_0^\infty (1 - F(u)) du} \int_t^\infty (1 - F(u)) du = \\ &= \frac{1}{\int_0^\infty (1 - F(u)) du} \left(\int_0^\infty (1 - F(u)) du - \int_0^t (1 - F(u)) du \right) = \\ &= 1 - \frac{\int_0^t (1 - F(u)) du}{\int_0^\infty (1 - F(u)) du}. \end{aligned}$$

Продифференцировав $v_0(t)$ по t получаем

$$v_0'(t) = -\frac{1 - F(t)}{\int_0^\infty (1 - F(u)) du} = -f_1(t).$$

В частности, при $t = 0$

$$v_0'(0) = -\frac{1}{\int_0^\infty (1 - F(u)) du} = -f_1(0). \quad (3.69)$$

Из (3.68) и из

$$f_1'(x) = -\frac{F'(x)}{\int_0^\infty (1 - F(x)) dx} = -\frac{f(x)}{\int_0^\infty (1 - F(x)) dx}$$

следует

$$f(x) = -f_1'(x) \int_0^\infty (1 - F(x)) dx = v_0''(t) \int_0^\infty (1 - F(x)) dx.$$

С учетом (3.69) окончательно получаем

$$f(x) = -\frac{v_0''(x)}{v_0'(0)}.$$

Таким образом вероятности $v_0(t)$ связаны с плотностями $f(x)$ и $f_1(x)$ следующими соотношениями

$$f_1(t) = -v_0'(t), \quad f(t) = -\frac{v_0''(t)}{v_0'(0)}, \quad t > 0.$$

Рассмотрим некоторые свойства функции $v_0(t)$.

1. Из $v_0''(x) = -f(x)v_0'(0)$ и $v_0'(0) = -f_1(0)$ (см (3.69)) и $f_1(0) \geq 0$ следует, что $v_0''(x) \geq 0$.

2. Из $f_1(t) = -v_0'(t)$ и $v_0'(0) = -f_1(0)$ следует, что $|v_0'(0)| = |f_1(0)| < \infty$.

3. Из

$$v_0(t) = 1 - \frac{\int_0^t (1 - F(u)) du}{\int_0^\infty (1 - F(u)) du} \quad (3.70)$$

следует, что $v_0(0) = 1$.

4. Из (3.70) следует также, что $v_0(\infty) = 1$.

Пуассоновский поток

Если $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$, то $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$. Действительно,

$$F(x) = \alpha \int_0^x e^{-\alpha u} du = \int_0^x e^{-\alpha u} d\alpha u = -e^{-\alpha u} \Big|_0^x = 1 - e^{-\alpha x}.$$

Тогда

$$f_1(x) = \frac{1 - 1 + e^{-\alpha x}}{\frac{1}{\alpha} \int_0^\infty (1 - 1 + e^{-\alpha x}) d\alpha x} = \frac{e^{-\alpha x}}{\frac{1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha x} d\alpha x} = \alpha e^{-\alpha x}.$$

Значит для Пуассоновского потока $f(x) = f_1(x)$. Свойства 1.-4. выполняются. Например, $|v_0'(0)| = |f_1(0)| = |\alpha e^{-\alpha 0}| = \alpha < \infty$.

Построим стационарный случайный процесс $\xi(t)$ в интервале $(0, T)$ с заданной одномерной функцией распределения $F_\xi(x)$ на основе потока Пальма $\{\tau_k\}$ с $v_0(t)$ по следующему правилу:

1. моделируется последовательность $\{\tau_k\}$ до первого выхода из $(0, T)$;
2. для каждого интервала (τ_{i-1}, τ_i) , $i = 1, 2, \dots$ полагаем $\xi(t) = \xi_i$, где ξ_i независимые

случайные величины с функцией распределения $F_\xi(x)$.

Выпишем коэффициент корреляции между значениями процесса $\xi(t)$, в точках 0 и t

$$\begin{aligned}
 Corr(\xi(0), \xi(t)) &= \frac{M\xi(0)\xi(t) - M\xi(0)M\xi(t)}{\sqrt{M\xi^2(0) - (M\xi(0))^2} \sqrt{M\xi^2(t) - (M\xi(t))^2}} = \\
 &= \frac{v_0(t)M\xi(0)\xi(t) + (1 - v_0(t))M\xi(0)M\xi(t) - M\xi(0)M\xi(t)}{\sqrt{M\xi^2(t) - (M\xi(t))^2} \sqrt{M\xi^2(t) - (M\xi(t))^2}} = \\
 &= \frac{v_0(t)M\xi^2(t) + M\xi(t)M\xi(t) - v_0(t)M\xi(t)M\xi(t) - M\xi(t)M\xi(t)}{M\xi^2(t) - (M\xi(t))^2} = \\
 &= \frac{v_0(t)M\xi^2(t) - v_0(t)M\xi(t)M\xi(t)}{M\xi^2(t) - (M\xi(t))^2} = \\
 &= \frac{v_0(t) (M\xi^2(t) - (M\xi(t))^2)}{M\xi^2(t) - (M\xi(t))^2} = v_0(t).
 \end{aligned}$$

При выводе использовался тот факт, что одномерное распределение процесса не зависит от t , а это в свою очередь определяется способом построения процесса. Поэтому моменты распределения также не зависят от t и формула упрощается. Поскольку Поток Пальма

стационарный, то $v_0(t)$ зависит только от длины интервала, а это эквивалентно тому, что корреляция зависит только от расстояния между точками 0 и t . Таким образом, процесс стационарен в широком смысле.

3.5 Кусочно-постоянное стохастическое восполнение негауссовских случайных процессов и полей с сохранением их исходных свойств

В монографии С.В. Доценко [12] рассмотрен метод интерполяции случайной последовательности $\xi_k = \xi(k\Delta t)$, $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$ в произвольную точку временной оси в виде свертки

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega(t - n\Delta t)\xi_n, \quad (3.71)$$

где $\omega(t)$ - детерминированная базовая функция, определяющая свойства процесса $\xi(t)$, Δt - шаг дискретизации процесса. В общем случае $\xi(t)$ представляет собой периодически нестационарный процесс, для которого имеют место условия периодичности математического ожидания и корреляционной функции

$$\begin{aligned} M\xi(t_1 + \Delta t) &= M\xi(t_1), \\ R(t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t) &= R(t_1, t_2). \end{aligned}$$

В работе [24] предлагается способ преобразования нестационарного процесса (3.71) к стационарному на основе “рандомизации фазы” в виде

$$\zeta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega(t - n\Delta t + \alpha)\xi(k\Delta t - \alpha), \quad (3.72)$$

где α - случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[-1/2, 1/2]$.

В данном параграфе рассматривается простая модификация этого метода, в соответствии с которой последовательность ξ_n задана на фиксированной системе временных отсчетов (или временной сетке), а $\xi(t)$ строится как кусочно-постоянная функция с точками разрыва, образующими регулярный поток точек [5]. Для простоты положим $\Delta t = 1$.

Пусть на оси t в точках $t_i : t_i = i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ задана стационарная в широком смысле случайная последовательность $\xi(i) = \xi_i$ с одномерным распределением $F(x)$ и корреляционной функцией $R(|i - j|) = R_m, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, R_0 = 1$.

Процесс $\xi(t)$ будем строить по правилу [9] (Рис. 3.7.):

(1а) Независимо от ξ_i моделируется случайная величина α , равномерно распределенная в $[0, 1]$, и для каждого $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ на оси t выбирается точка $i + \alpha$.

(2а) В интервале $(i - 1 + \alpha, i + \alpha]$ принимается $\xi(t) \equiv \xi_{i+E(\alpha)}$, где $E(\alpha)$ - целая часть действительного числа α .

Рассмотрим основные свойства процесса $\xi(t)$, при этом отметим, что по построению значения процесса $\xi(t)$ в точках $t_i = i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ совпадают со значениями последовательности ξ_i .

Утверждение 3.1. Если последовательность ξ_i стационарна в широком смысле с корреляционной функцией R_m , то процесс $\xi(t)$ также является стационарным в широком смысле процессом с кусочно-линейной корреляционной функцией $R(\tau)$, совпадающей с R_m при $\tau = m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, причем его одномерное распределение в произвольной точке t совпадает с $F(x)$.

Доказательство. Положим $t'_0 = t_0 - E(t_0) \geq 0, t_0 \in (i, i + 1]$, где $E(t)$ - целая часть действительного числа t . Коэффициент корреляции между значениями процесса в точках t'_0 и $t' = t'_0 + h, h \in (-1, 1)$ принимает вид:

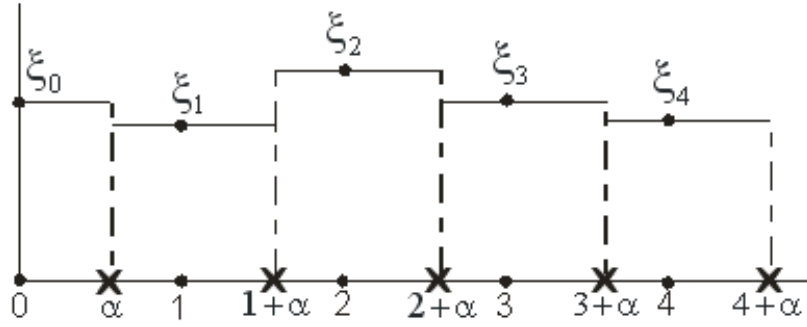


Рис. 3.7: Кусочно-постоянное восполнение случайного процесса, заданного на регулярной сетке

при $h \in (0, 1]$, $t' \leq 1$

$$R(t'_0, t') = (1 - t')R_0 + (t' - t'_0)R_1 + t'_0R_0 = (1 - h)R_0 + hR_1,$$

при $h \in (0, 1]$, $t' > 1$

$$R(t'_0, t') = (t' - 1)R_1 + (t'_0 - t' + 1)R_0 + (1 - t'_0)R_1 = (1 - h)R_0 + hR_1,$$

при $h \in (-1, 0]$, $t' \geq 0$

$$R(t'_0, t') = t'R_0 + (t'_0 - t')R_1 + (1 - t'_0)R_0 = (1 + h)R_0 - hR_1,$$

при $h \in (-1, 0]$, $t' < 0$, с учетом четности R_m

$$R(t'_0, t') = t'_0R_1 + (t' + 1 - t'_0)R_0 - t'R_{-1} = (1 + h)R_0 - hR_1.$$

Следовательно, для любого t_0 при $|h| < 1$

$$R(t_0, t) = (1 - |h|)R_0 + |h|R_1 = R(h).$$

Пусть теперь $t_0 \in (i, i + 1]$, $t = t_0 + \tau$, а $\tau = m + h$, где $m = E(\tau)$. Тогда

$$\begin{aligned} R(t_0, t) &= (1 - |h|)R_m + |h|R_{m+1} = \\ &= (1 - |\tau - m|)R_m + |\tau - m|R_{m+1} = R(\tau), \quad m = E(\tau). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Доказательство сохранения распределения следует из равенства:

$$\begin{aligned} F_{\xi(t)}(x) &= P(t - i > \alpha)F(x) + P(t - i \leq \alpha)F(x) = \\ &= (t - i)F(x) + (1 - (t - i))F(x) = F(x), \quad i = E(t). \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Формулу (3.73) можно также представить в виде

$$R(\tau) = \sum_{m=E(\tau)-1}^{E(\tau)+1} K(\tau - m)R_m, \quad K(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|, & |\tau| < 1, \\ 0, & |\tau| \geq 1. \end{cases} \quad (3.74)$$

или, в более общем случае, корреляционная функция $R(\tau)$ представляема в виде свертки [32] вида

$$R(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K(\tau - m)R_m, \quad K(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|, & |\tau| < 1, \\ 0, & |\tau| \geq 1. \end{cases} \quad (3.75)$$

Аналогичный с (3.73), (3.75) результат отмечен в [44] (теорема Шеппа), но доказательство этих соотношений не связано со способом представления стационарного в широком смысле процесса $\xi(t)$.

Преобразование Фурье функции вида (3.73) (либо (3.75)) дает [32]

$$f(\lambda) = 2g(\lambda)\hat{f}(\lambda),$$

где

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2} \right] -$$

спектральная плотность, соответствующая процессу с корреляционной функцией $R(\tau)$, а

$$\hat{f}(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda - \pi m) -$$

периодическое продолжение спектральной плотности

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos \lambda_m$$

случайной стационарной в широком смысле последовательности ξ_i с корреляционной функцией R_m .

Отметим, что если стационарная в широком смысле последовательность ξ_i задана на ограниченном интервале, например, $i \in [0, M - 1]$, и корреляции $R_{|m|}$ при $|m| > M - 1$ не определены, то для того, чтобы воспользоваться формулой (3.75), необходимо продолжить корреляционную последовательность R_0, R_1, \dots, R_{M-1} до последовательности

$$\dots, \hat{R}_{-M}, R_{-M+1}, \dots, R_{-1}, R_0, R_1, \dots, R_{M-1}, \hat{R}_M, \dots$$

так, чтобы она сохранила свойство неотрицательной определенности. Это можно сделать, например, если воспользоваться уравнением Юла-Уолкера [2], связанного с моделью авторегрессии $M - 1$ порядка. Отметим, что существование кусочно-линейной интерполяции корреляционной последовательности на ограниченном интервале следует автоматически из представления процесса (1а)-(3а), а соответствующая интерполирующая формула для корреляций имеет вид (3.73) при $m < M - 1$.

Рассмотрим другую интерпретацию преобразований (1а)-(3а). В работе С.М Рытова [36] исследованы свойства процессов в виде суперпозиции импульсов вида

$$\xi(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} F(t - t_{\nu}),$$

где импульс $F(t)$ описывается детерминированной функцией, t_{ν} - случайный момент возникновения импульса, а амплитуда a_{ν} импульса может быть как случайной, так и детерминированной величиной. В более общей постановке, рассмотренной в этой же работе, импульс $F(t)$ может описываться функцией, зависящей от $t - t_{\nu}$, а также от конечного числа случайных параметров. Рассмотренный в данном параграфе процесс вида (1а)-(3а) может быть описан в виде суммы (3.71), где $\omega(t)$ - специальная функция со случайным параметром.

Утверждение 3.2. Стационарный в широком смысле процесс, построенный с помощью преобразований (1a)-(3a), может быть представлен в виде свертки

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega(t-n)\xi_n \quad (3.76)$$

стационарной в широком смысле последовательности ξ_i по нестационарному процессу $\omega(t)$:

$$\omega(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t \leq \alpha - 1, \\ 1, & \alpha - 1 < t \leq \alpha, \\ 0, & \alpha < t < \infty, \end{cases}$$

где α - случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[0, 1]$

Доказательство. Процесс $\omega(t)$ можно интерпретировать, как индикаторный процесс непрерывного времени, принимающий значения 0 и 1 с вероятностями $P(\omega(t) = 1) = p_1$ и $P(\omega(t) = 0) = p_0$, связанными с распределением случайной величины α соотношениями

$$\begin{aligned} P(\omega(t) = 1) &= P(\alpha - 1 < t \leq \alpha), \\ P(\omega(t) = 0) &= P(-\infty < t \leq \alpha - 1) + P(\alpha < t < \infty). \end{aligned}$$

Очевидно, что процесс $\omega(t)$ - не стационарный. Рассмотрим некоторые его свойства.

Для любого $t \in (0, 1]$ имеют место следующие соотношения для его одномерных распределений

$$\begin{aligned} P(\omega(t) = 1) &= 1 - t, \\ P(\omega(t-1) = 1) &= t, \\ P(\omega(t) = 0) &= t, \\ P(\omega(t-1) = 0) &= 1 - t. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} P(\omega(t) = 1) + P(\omega(t-1) = 1) &= 1, \\ P(\omega(t) = 0) + P(\omega(t-1) = 0) &= 1. \end{aligned} \quad (3.78)$$

При любых $t > 0$, $\tau > 0$, $t' = t + \tau \leq 1$ для вероятностей событий вида $A = (\omega(t) = 1, \omega(t') = 1)$ выполняются следующие соотношения

$$\begin{aligned} P(\omega(t) = 1, \omega(t + \tau) = 1) &= 1 - t - \tau, \\ P(\omega(t) = 1, \omega(t + \tau - 1) = 1) &= \tau, \\ P(\omega(t - 1) = 1, \omega(t + \tau) = 1) &= 0, \\ P(\omega(t - 1) = 1, \omega(t + \tau - 1) = 1) &= t. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Эти соотношения будут использованы при вычислении корреляционной функции процесса $\xi(t)$.

На основе (3.71), (3.77) построим процесс $\xi(t)$ в виде (3.76). Поскольку импульс $\omega(t)$ имеет единичную длину, совпадающую с шагом дискретизации процесса ξ_i , то процесс $\xi(t)$ представляет собой кусочно-постоянную функцию со “слепленными импульсами”, амплитуды которых совпадают с ξ_i . Таким образом, представление процесса в виде (3.76) эквивалентно представлению (1a)-(3a). **Утверждение доказано.**

Процесс $\xi(t)$ можно интерпретировать как свертку стационарной в широком смысле случайной последовательности ξ_i по независимому от ξ_i нестационарному случайному процессу непрерывного аргумента $\omega(t)$. За счет формы импульса в бесконечной сумме (3.76) при каждом значении t участвуют только два ненулевых слагаемых, поэтому в данном случае вывод формулы для корреляционной функции процесса совпадает с выводом формулы (3.73).

Приведем более общие способы восполнения. В процедуре (1a)-(3a) происходит восполнение процесса в точку $t \in (i, i + 1]$ по двум значениям дискретного процесса ξ_i и ξ_{i+1} . Рассмотрим пример, когда восполнение внутри интервала $(i, i + 1]$ осуществляется по произвольному четному числу значений исходного процесса ξ_i в точках $i - m, i - m + 1, \dots, i - 1, 1, i + 1, \dots, i + m + 1$. Рассмотрим следующий алгоритм:

(1b) Независимо от ξ_i моделируются две случайные величины α_1 и α_2 , равномерно распределенные в $[0, 1]$, и для каждого $i =$

$0, \pm 1, \pm 2, \dots$ на оси t выбираются точки $i + \alpha_1$ и $i + \alpha_2$.

(2b) В каждом интервале $(i, i + 1]$ полагаем

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi_i & t \in (i, i + \min(\alpha_1, \alpha_2)] \\ \xi_{i-k} & t \in (i + \alpha_1, i + \alpha_2], \quad \alpha_1 < \alpha_2 \\ \xi_{i+k+1} & t \in (i + \alpha_2, i + \alpha_1], \quad \alpha_2 < \alpha_1 \\ \xi_{i+1} & t \in (i + \max(\alpha_1, \alpha_2), i + 1] \end{cases},$$

где k - случайный индекс, принимающий значения $1, \dots, m$ с вероятностями P_1, \dots, P_m , $\sum_{i=1}^m P_i = 1$.

Утверждение 3.3. Пусть $\dots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots$ - стационарная в широком смысле случайная последовательность с одномерным распределением $F(x)$ и корреляционной функцией $R(|i - j|) = R_m$. Тогда процесс $\xi(t)$, построенный с помощью восполнения (1b)-(2b), является стационарным в широком смысле с корреляционной функцией

$$R(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K(\tau - m)R_m, \quad (3.80)$$

где

$$K(x) = \begin{cases} (1 - |x|)^2, & |x| \leq 1 \\ P_i(x + i + 1 - (x + i + 1)^2), & x \in (-(i + 1), -i], \quad i = 1, \dots, m \\ P_i(x - i - (x - i)^2), & x \in (i, i + 1], \quad i = 1, \dots, m \\ 0, & |x| > m + 1 \end{cases},$$

причем его одномерное распределение в произвольной точке t совпадает с $F(x)$.

Доказательство. Вычислим коэффициент корреляции между точками t и $t + \tau$. Пусть t и $\tau - n$ лежат между соседними целыми числами (t отсчитываем от левого целого числа). Легко выяснить, что

$$R(t, \tau) = \sum_{i=1}^9 q_i,$$

где

$$\begin{aligned}
q_i &= q_i(t, \tau), \quad i = 1, \dots, 9, \\
q_1 &= P(\alpha_1 < t)P(t < \alpha_2 < t + \tau - n) \sum_{j=1}^m R_{n+1+j}P_j = \\
&= t(\tau - n) \sum_{j=1}^m R_{n+1+j}P_j, \\
q_2 &= P(\alpha_2 < t)P(t < \alpha_1 < t + \tau - n) \sum_{j=1}^m R_{n-j}P_j = \\
&= t(\tau - n) \sum_{j=1}^m R_{n-j}P_j, \\
q_3 &= P(t < \alpha_1 < t + \tau - n)P(\alpha_2 > t + \tau - n) \sum_{j=1}^m R_{n-j}P_j = \\
&= (\tau - n)(1 - t - \tau + n) \sum_{j=1}^m R_{n-j}P_j, \\
q_4 &= P(t < \alpha_2 < t + \tau - n)P(\alpha_1 > t + \tau - n) \sum_{j=1}^m R_{n+1+j}P_j = \\
&= (\tau - n)(1 - t - \tau + n) \sum_{j=1}^m R_{n+1+j}P_j,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_5 &= P(t < \alpha_1 < t + \tau - n)P(t < \alpha_2 < t + \tau - n)R_{n+1} = \\
&= (\tau - n)(\tau - n)R_{n+1}, \\
q_6 &= P(\alpha_1 < t)P(\alpha_2 > t + \tau - n)R_n = t(1 - t - \tau + n)R_n, \\
q_7 &= P(\alpha_2 < t)P(\alpha_1 > t + \tau - n)R_n = t(1 - t - \tau + n)R_n, \\
q_8 &= P(\alpha_1 < t)P(\alpha_2 < t)R_n = ttR_n, \\
q_9 &= P(\alpha_1 > t + \tau - n)P(\alpha_2 > t + \tau - n)R_n = \\
&= (1 - t - \tau + n)(1 - t - \tau + n)R_n,
\end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned}
R(t, \tau) &= (\tau - n - 1)^2 R_n + (\tau - n)^2 R_{n+1} + \\
&+ \sum_{j=1}^m (\tau - n - (\tau - n)^2) R_{n-j} P_j + \\
&+ \sum_{j=1}^m (\tau - n - (\tau - n)^2) R_{n+1+j} P_j = R(\tau).
\end{aligned}$$

Таким образом, стационарность в широком смысле сохраняется.

Очевидно, корреляционную функцию $R(\tau)$ можно представить в виде (3.80). **Утверждение доказано.**

Пример. Частным случаем такого восполнения является восполнение по четырем значениям процесса $\xi_i, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \xi_{i+2}$. В этом случае процедуру восполнения можно представить в виде:

(1с) Независимо от ξ_i моделируются две случайные величины α_1 и α_2 , равномерно распределенные в $[0, 1]$, и для каждого $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ на оси t выбираются точки $i + \alpha_1$ и $i + \alpha_2$.

(2с) В каждом интервале $(i, i + 1]$ полагаем

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi_i & t \in (i, i + \min(\alpha_1, \alpha_2)] \\ \xi_{i-1} & t \in (i + \alpha_1, i + \alpha_2], \quad \alpha_1 < \alpha_2 \\ \xi_{i+2} & t \in (i + \alpha_2, i + \alpha_1], \quad \alpha_2 < \alpha_1 \\ \xi_{i+1} & t \in (i + \max(\alpha_1, \alpha_2), i + 1] \end{cases}, \quad (3.81)$$

Тогда корреляционная функция процесса $\xi(t)$ представима в виде:

$$R(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K(\tau - m)R_m,$$

где

$$K(\tau) = \begin{cases} (1 - |\tau|)^2, & |\tau| \leq 1 \\ 3|\tau| - \tau^2 - 2, & 1 < |\tau| \leq 2 \\ 0, & |\tau| > 2. \end{cases},$$

Если в (3.81) ξ_{i-1} и ξ_{i+2} заменить на ξ_i и ξ_{i+1} соответственно, то $K(\tau)$ примет вид:

$$K(\tau) = \begin{cases} (1 - |\tau|)^2, & |\tau| \leq 1 \\ 0, & |\tau| > 1. \end{cases}$$

3.5.1 Восполнение однородного поля с узлов регулярной сетки в произвольную точку области

В работе [9] рассмотрен следующий алгоритм кусочно-постоянного восполнения негауссова однородного поля с узлов регулярной сетки

$\omega_h = \{(x_0 \pm hi, x_0 \pm hj); i, j = 0, 1, \dots; x_0 = 0\}$ (для простоты будем рассматривать сетку $\omega_1 = \{(x_0 \pm i, x_0 \pm j); i, j = 0, 1, \dots; x_0 = 0\}$ с целочисленными координатами узлов) в произвольную точку области D на плоскости.

Пусть $\xi(i, j) = \xi_{ij}$ однородное в широком смысле негауссово двумерное поле в узлах сетки ω_1 с одномерным распределением $F(u)$ и корреляционной функцией

$$\frac{M(\xi_{ij} - M\xi_{ij})(\xi_{kl} - M\xi_{kl})}{\sqrt{D\xi_{ij}}\sqrt{D\xi_{kl}}} = R(|i - k|, |j - l|) = R_{mn}.$$

Рассмотрим процедуру восполнения поля ξ_{ij} с узлов сетки ω_1 в произвольную точку (x, y) области D (Рис. 3.8.). (1d) Независимо выбираются две случайные величины α_1 и α_2 , равномерно распределенные в интервале $[0, 1]$. На каждой оси x и y выбираются точки $i \pm \alpha_1$, $j \pm \alpha_2$, где i и j - координаты сетки на осях x и y . Перпендикулярно осям через точки $i \pm \alpha_1$, $j \pm \alpha_2$ проводятся прямые, разбивающие всю плоскость на квадраты со сторонами единичной длины. Выберем эти квадраты таким образом:

$$T_{ij}(x, y) = \{x, y : i - 1 + \alpha_1 < x \leq i + \alpha_1; j - 1 + \alpha_2 < y \leq j + \alpha_2\}$$

(2d) В каждом квадрате T_{ij} полагаем $\xi(x, y) \equiv \xi_{i+E(\alpha_1), j+E(\alpha_2)}$

Утверждение 3.4. Одномерное распределение поля $\xi(x, y)$ в произвольной точке (x, y) совпадает с $F(u)$, и поле является однородным в широком смысле с корреляционной функцией

$$R(\Delta x, \Delta y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K(\Delta x - m, \Delta y - n) R_{mn}, \quad (3.82)$$

где

$$K(\Delta x, \Delta y) = \begin{cases} 1 - |\Delta x| - |\Delta y| + |\Delta x||\Delta y|, & |\Delta x| \leq 1, |\Delta y| \leq 1, \\ 0, & |\Delta x| > 1 \text{ или } |\Delta y| > 1 \end{cases} \quad (3.83)$$

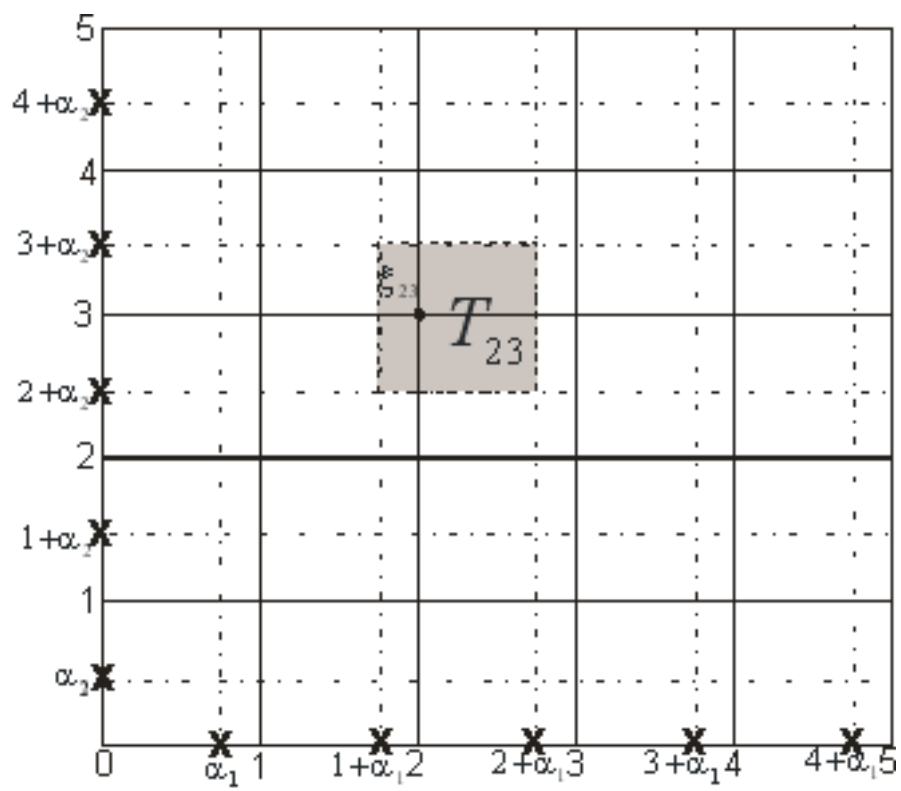


Рис. 3.8: Восполнение однородного поля с узлов регулярной сетки

Доказательство. Получим соотношение (3.82). Вначале рассмотрим случай, когда ξ_{ij} не коррелированы. Для простоты будем рассматривать случай, когда

$$M\xi_{ij} = 0, D\xi_{ij} = 1 \quad . \quad (3.84)$$

Покажем, что корреляционная функция поля $\xi(x, y)$, полученного в результате преобразования (1d)-(2d) поля ξ_{ij} имеет вид (3.83). Действительно, коэффициент корреляции между точками (x_0, y_0) и $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ можно представить в виде (здесь рассматриваем $\Delta x \leq 1, \Delta y \leq 1$, т.к. иначе коэффициент корреляции будет равен нулю в связи с некоррелированностью ξ_{ij}):

$$\begin{aligned} R(x_0, y_0; x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= M\xi(x_0, y_0)\xi(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \\ &= P(A_{ij})M\xi_{ij}^2 + P(A_{ij+1})M\xi_{ij+1}^2 + \\ &+ P(A_{i+1j})M\xi_{i+1j}^2 + P(A_{i+1j+1})M\xi_{i+1j+1}^2, \end{aligned} \quad (3.85)$$

где $P(A_{ij}), P(A_{ij+1}), P(A_{i+1j}), P(A_{i+1j+1})$ - вероятности событий, состоящих в том, что точки $(x_0, y_0), (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ принадлежат квадратам $T_{ij}, T_{ij+1}, T_{i+1j}$ и T_{i+1j+1} , т.е. событий вида

$$A_{ij} = ((x_0, y_0) \in T_{ij}, (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in T_{ij}).$$

Пусть $x'_0 = E(x_0), y'_0 = E(y_0)$. Учитывая равномерность и независимость величин α_1 и α_2 , условия (3.84) и некоррелированность величин ξ_{ij} получаем, что

при $\Delta x \geq 0, \Delta y \geq 0$

$$\begin{aligned} R(x_0, y_0; x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= \\ &= P(A_{ij}) + P(A_{ij+1}) + P(A_{i+1j}) + P(A_{i+1j+1}) = \\ &= (1 - x'_0 - \Delta x)(1 - y'_0 - \Delta y) + \\ &+ (1 - x'_0 - \Delta x)y'_0 + x'_0(1 - y'_0 - \Delta y) + x'_0y'_0 = \\ &= 1 - \Delta x - \Delta y + \Delta x\Delta y, \end{aligned}$$

при $\Delta x \geq 0, \Delta y < 0$

$$\begin{aligned} R(x_0, y_0; x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= \\ &= (1 - x'_0 - \Delta x)(1 - y'_0) + \\ &+ (1 - x'_0 - \Delta x)(y'_0 + \Delta y) + x'_0(1 - y'_0) + x'_0 y'_0 = \\ &= 1 - \Delta x + \Delta y - \Delta x \Delta y, \end{aligned}$$

при $\Delta x < 0, \Delta y \geq 0$

$$\begin{aligned} R(x_0, y_0; x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= (1 - x'_0)(1 - y'_0 - \Delta y) + \\ &+ (1 - x'_0)y'_0 + (x'_0 + \Delta x)(1 - y'_0 - \Delta y) + (x'_0 + \Delta x)y'_0 = \\ &= 1 + \Delta x - \Delta y - \Delta x \Delta y, \end{aligned}$$

при $\Delta x < 0, \Delta y < 0$

$$\begin{aligned} R(x_0, y_0; x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= (1 - x'_0)(1 - y'_0) + \\ &+ (1 - x'_0)(y'_0 + \Delta y) + (x'_0 + \Delta x)(1 - y'_0) + (x'_0 + \Delta x)(y'_0 + \Delta y) = \\ &= 1 + \Delta x + \Delta y + \Delta x \Delta y, \end{aligned}$$

что и доказывает формулу (3.82), в которой в данном случае может быть только одно слагаемое при $R_{00} = 1$, т.к. ξ_{ij} не коррелированы.

Рассмотрим случай, когда значения поля ξ_{ij} в узлах сетки коррелированы. Пусть R_{mn} , $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ - корреляционная функция поля ξ_{ij} . Коэффициент корреляции между произвольны-

ми точками (x_0, y_0) , $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ поля $\xi(x, y)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
& R(x_0, y_0; x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \\
& = \sum_{k=i}^{i+1} \sum_{l=j}^{j+1} P((x_0, y_0), (x_0 + \Delta x - m, y_0 + \Delta y - n) \in T_{kl}) R_{mn} + \\
& + \sum_{k=i}^{i+1} \sum_{l=j}^{j+1} P((x_0, y_0), (x_0 + \Delta x - m - 1, y_0 + \Delta y - n) \in T_{kl}) R_{m+1, n} + \\
& + \sum_{k=i}^{i+1} \sum_{l=j}^{j+1} P((x_0, y_0), (x_0 + \Delta x - m, y_0 + \Delta y - n - 1) \in T_{kl}) R_{m, n+1} + \\
& + \sum_{k=i}^{i+1} \sum_{l=j}^{j+1} P((x_0, y_0), (x_0 + \Delta x - m - 1, y_0 + \Delta y - n - 1) \in T_{kl}) \times \\
& \times R_{m+1, n+1} = \\
& = K(\Delta x - m, \Delta y - n) R_{mn} + K(\Delta x - m - 1, \Delta y - n) R_{m+1, n} + \\
& + K(\Delta x - m, \Delta y - n - 1) R_{m, n+1} + \\
& + K(\Delta x - m - 1, \Delta y - n - 1) R_{m+1, n+1},
\end{aligned}$$

где $m = E(\Delta x)$, $n = E(\Delta y)$.

Полученное соотношение может быть представлено в виде (3.82) [37], откуда непосредственно следует однородность поля в широком смысле. **Утверждение доказано.**

Замечание. Функция (3.83) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
& K(\Delta x, \Delta y) = K_1(\Delta x) K_2(\Delta y) = \\
& = \begin{cases} (1 - |\Delta x|)(1 - |\Delta y|), & |\Delta x| \leq 1, |\Delta y| \leq 1, \\ 0, & |\Delta x| > 1 \text{ } |\Delta y| > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
K_1(\Delta x) &= \begin{cases} (1 - |\Delta x|), & |\Delta x| \leq 1, \\ 0, & |\Delta x| > 1, \end{cases} \\
K_2(\Delta y) &= \begin{cases} (1 - |\Delta y|), & |\Delta y| \leq 1, \\ 0, & |\Delta y| > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Следовательно, процедура восполнения (1d)-(2d) сводится к модификации известной процедуры моделирования полей “по строкам и

столбцам” [29] с учетом специфики рассматриваемых здесь кусочно-постоянных полей. Рассмотрим модификацию этой процедуры на примере двумерных полей.

Если поле ξ_{ij} однородно, то в результате преобразований (1d)-(2d) мы имеем однородное поле с корреляционной функцией

$$\begin{aligned} R(\Delta x, \Delta y) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_1(\Delta x - m) K_2(\Delta y - n) R_{mn} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_2(\Delta y - n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_1(\Delta x - m) R_{mn} \end{aligned}$$

Отсюда вытекает следующий способ выполнения:

(1e) Для каждого $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ поля ξ_{ij} , $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ строим процессы $\xi_j(x)$ по строкам с помощью одномерной процедуры (1a)-(2a) в которой равномерно распределенная величина $\alpha = \alpha_1$ одна и та же для каждого j . Каждый из процессов $\xi_j(x)$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ будет иметь корреляционную функцию

$$R_0(\Delta x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_1(\Delta x - m) R_{m0},$$

а в совокупности эти процессы образуют поле с дискретным аргументом по y и непрерывным аргументом по x . Корреляционная функция такого поля будет

$$R_n(\Delta x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_1(\Delta x - m) R_{mn}$$

(2e) Применяя одномерную процедуру выполнения (1a)-(2a), в которой равномерно распределенная величина $\alpha = \alpha_2$ одна и та же для каждого x_0 , для получения значения поля в произвольной точке (x_0, y) по значениям процесса $\xi_j(x_0)$ в узлах $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ строится процесс $\xi(x_0, y)$, корреляционная функция которого будет иметь вид

$$R(\Delta x, \Delta y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_2(\Delta y - n) R_n(\Delta x) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_1(\Delta x - m)K_2(\Delta y - n)R_{mn}.$$

3.5.2 Восполнение однородного и изотропного поля

Пусть ξ_{ij}^0 - однородное двумерное негауссово поле в узлах сетки $\omega_1 = \{(x_0 \pm i, x_0 \pm j); i, j = 0, 1, \dots; x_0 = 0\}$ с одномерным распределением $F(u)$ и корреляционной функцией $R(|i - k|, |j - l|) = R(m, n) = R_{mn}$. Определим условия однородности и изотропности такого поля. Поле ξ_{ij}^0 однородно и изотропно, если выполняются следующие условия

$$R_{mn} = R_{pq}, \quad m^2 + n^2 = p^2 + q^2. \quad (3.86)$$

Рассмотрим также сетку $\omega_{1/2} = \{(x_0 \pm \frac{1}{2}i, x_0 \pm \frac{1}{2}j); i, j = 0, 1, \dots; x_0 = 0\}$. Условия однородности и изотропности поля $\xi_{ij}^{1/2}$ на сетке $\omega_{1/2}$ имеют вид

$$R_{m+k/2, n+l/2} = R_{p+k/2, q+l/2}, \quad k, l = 0, 1; \\ (m+k/2)^2 + (n+l/2)^2 = (p+k/2)^2 + (q+l/2)^2 \quad (3.87)$$

Рассмотрим интерполяцию корреляционной функции R_{nm} в точку $(i+k/2, j+l/2)$ $k, l = 0; 1$ $k+l > 0$ в виде

$$R(i+k/2, j+l/2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K(i+k/2-m, j+l/2-n)R_{mn}. \quad (3.88)$$

Утверждение 3.5. Если R_{mn} удовлетворяет условиям (3.86), $K(\Delta x, \Delta y)$ такая, что $K(0, 0) = 1$, $K(i+k/2, j+l/2)$ удовлетворяет условию (3.87), а при $i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ $K(i, j) = 0$, то корреляционная функция (3.88) является корреляционной функцией однородного и изотропного поля в смысле определения (3.86).

Доказательство. Пусть R_{mn} удовлетворяет условиям (3.86), $K(\Delta x, \Delta y)$ такая, что $K(0, 0) = 1$, $K(i+k/2, j+l/2)$ удовлетворяет

условию (3.87), а при $i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ $K(i, j) = 0$. Из условий (3.86) и (3.87) имеем

$$\begin{aligned} R(i + k/2, j + l/2) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K(i + k/2 - n, j + l/2 - m) R_{mn} = \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} K(r + k/2 - p, s + l/2 - q) R_{pq} = R(r + k/2, s + l/2), \\ &\quad (i + k/2)^2 + (j + l/2)^2 = (r + k/2)^2 + (s + l/2)^2. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Пусть теперь поле $\xi_{i'j'}^{1/2}$ в узлах $(i + k/2, j + l/2)$, $i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $k, l = 0, 1$, построено с помощью процедуры (1d)-(2d) восполнения однородного поля с узлов целочисленной сетки по значениям однородного изотропного поля ξ_{ij}^0 с корреляционной функцией R_{mn} в точки $(i + k/2, j + l/2)$.

Эту процедуру восполнения можно для данного случая интерпретировать следующим образом (восполнение по строкам и столбцам):

(1f) Для каждого $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ в узлах $(i + 1/2, j)$ значение поля $\xi_{i'j'}^{1/2}$ полагаем равным одному из значений поля ξ_{ij}^0 с соседних узлов (i, j) $(i + 1, j)$ с вероятностью $1/2$.

(2f) Для каждого $i = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \pm 2, \dots$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ в узлах $(i, j + 1/2)$ значение поля $\xi_{i'j'}^{1/2}$ полагаем равным одному из значений поля ξ_{ij}^0 с соседних узлов (i, j) $(i, j + 1)$ с вероятностью $1/2$. В узлах $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ значения поля $\xi_{i'j'}^{1/2}$ полагаем равным значениям поля ξ_{ij}^0 в тех же узлах.

Отметим, что в этом случае нужно также разыгрывать только две независимые равномерно распределенные в интервале $[0, 1]$ случайные величины: α_1 одна и та же для каждого j для шага (1f) и α_2 одна и та же для каждого i для шага (2f). При таком восполнении по утверждению 3.4. корреляционная функция полученного поля $\xi_{i'j'}^{1/2}$

дискретного аргумента представима в виде свертки:

$$R(\Delta x, \Delta y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K(\Delta x - m, \Delta y - n) R_{mn}, \quad (3.89)$$

$$\Delta x = i + k/2, \quad \Delta y = j + l/2, \quad k, l = 0, 1.$$

Здесь $K(\Delta x, \Delta y)$ имеет вид

$$K(\Delta x, \Delta y) = \begin{cases} 1 - |\Delta x| - |\Delta y| + |\Delta x||\Delta y|, & |\Delta x| \leq 1, |\Delta y| \leq 1, \\ 0, & |\Delta x| > 1 \text{ или } |\Delta y| > 1 \end{cases}$$

и может быть также представлена как

$$K(\Delta x, \Delta y) = K_1(\Delta x)K_2(\Delta y) = \begin{cases} (1 - |\Delta x|)(1 - |\Delta y|), & |\Delta x| \leq 1, |\Delta y| \leq 1 \\ 0, & |\Delta x| > 1 \text{ или } |\Delta y| > 1 \end{cases},$$

где

$$K_1(\Delta x) = \begin{cases} (1 - |\Delta x|), & |\Delta x| \leq 1 \\ 0, & |\Delta x| > 1 \end{cases},$$

$$K_2(\Delta y) = \begin{cases} (1 - |\Delta y|), & |\Delta y| \leq 1 \\ 0, & |\Delta y| > 1 \end{cases}.$$

Далее процедура (1f)-(2f) повторяется, и для очередного шага исходным полем является поле $\xi_{i'j'}^{1/2}$, а исходной сеткой является сетка $\omega_{1/2} = \{(x_0 \pm \frac{1}{2}i, x_0 \pm \frac{1}{2}j); i, j = 0, 1, \dots; x_0 = 0\}$. Повторив процедуру (1f)-(2f) N раз, получим поле $\xi_{i'j'}^{1/N}$ (здесь индексы i', j' на каждом следующем шаге будут относиться к соответствующей новой сетке $\omega_{1/N} = \{(x_0 \pm \frac{1}{2^N}i, x_0 \pm \frac{1}{2^N}j); i, j = 0, 1, \dots; x_0 = 0\}$).

Утверждение 3.6. Поле $\xi_{i'j'}^{1/N}$ однородно и изотропно в смысле определения (3.86).

Доказательство. Действительно, R_{mn} удовлетворяет условиям (3.86), а $K(x, y)$ в точках $x = i + k/2$, $y = j + l/2$, $k, l = 0, 1$ удовлетворяет условиям (3.87). Следовательно, по доказанному утверждению 3.5 поле $\xi_{i'j'}^{1/2}$ однородно и изотропно. Далее по индукции доказывается для поля $\xi_{i'j'}^{1/N}$. **Утверждение доказано.**

Теперь рассмотрим произвольное поле ξ_{ij} , на сетке ограниченного размера $i, j = 0, \dots, N - 1$ с блочно-ковариационной матрицей вида

$$R_{(N)} = \left\| \begin{array}{ccccc} R_{00} & R_{01} & R_{02} & \dots & R_{0,N-1} \\ R_{01}^T & R_{11} & R_{12} & \dots & R_{0,N-2} \\ R_{02}^T & R_{12}^T & R_{22} & \dots & R_{0,N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{0,N-1}^T & R_{0,N-2}^T & R_{0,N-3}^T & \dots & R_{N-1,N-1} \end{array} \right\|,$$

Блоки этой матрицы $R_{ij} = M(\vec{\xi}_i - M\vec{\xi}_i)(\vec{\xi}_j - M\vec{\xi}_j)^T$ имеют размерность $N \times N$, где

$$\vec{\xi}_i = \left\| \begin{array}{c} \xi_{i0} \\ \xi_{i1} \\ \dots \\ \xi_{i,N-1} \end{array} \right\|.$$

Утверждение 3.7. Для того, чтобы поле дискретного аргумента ξ_{ij} было однородно и изотропно в смысле определения (3.86), для его блочно-ковариационной матрицы должны выполняться следующие условия:

- 1) блочная теплицевость ковариационной матрицы $R_{(N)}$,
- 2) теплицевость ее блоков,
- 3) симметричность блоков,

при выполнении условий 1)-3) можно переписать матрицу $R_{(N)}$ в

виде

$$\mathbf{R}_{(N)} = \left\| \begin{array}{cccc} \mathbf{R}_0 & \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 & \dots & \mathbf{R}_{N-1} \\ \mathbf{R}_1^T & \mathbf{R}_0 & \mathbf{R}_1 & \dots & \mathbf{R}_{N-2} \\ \mathbf{R}_2^T & \mathbf{R}_1^T & 0 & \dots & \mathbf{R}_{N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{R}_{N-1}^T & \mathbf{R}_{N-2}^T & \mathbf{R}_{N-3}^T & \dots & \mathbf{R}_0 \end{array} \right\|,$$

и, обозначив через ρ_{ik} - элемент блока \mathbf{R}_k :

$$\mathbf{R}_k = \left\| \begin{array}{cccc} \rho_{0k} & \rho_{1k} & \rho_{2k} & \dots & \rho_{N-1,k} \\ \rho_{1k} & \rho_{0k} & \rho_{1k} & \dots & \rho_{N-2,k} \\ \rho_{2k} & \rho_{1k} & \rho_{0k} & \dots & \rho_{N-3,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{N-1,k} & \rho_{N-2,k} & \rho_{N-3,k} & \dots & \rho_{0k} \end{array} \right\|,$$

запишем условие:

4) равенство элементов ρ_{ik} и ρ_{jl} матриц \mathbf{R}_k и \mathbf{R}_l , $k \neq l$ таких, что:

$$k^2 + i^2 = l^2 + j^2. \quad (3.90)$$

Доказательство. Условия 1)-4), очевидно, обусловлены тем, что для того, чтобы поле было однородным и изотропным в смысле определения (3.86), коэффициент корреляции между двумя точками должен определяться только расстоянием между ними. **Утверждение доказано.**

Отметим, что очевидным решением (3.90) является: $i = l$, $j = k$, но есть и другие решения, например: $7^2 + 1^2 = 5^2 + 5^2$.

В качестве примера рассмотрим однородное изотропное поле ξ_{ij} , на сетке ограниченного размера $i, j = 0, \dots, N-1$, выпишем блочно-ковариационную матрицу поля $\xi_{i'j'}^{1/2}$ в узлах $(i + k/2, j + l/2)$, $i, j = 0, +1, +2, \dots, N-1$, $k, l = 0, 1$, полученного с помощью процедуры

(1f)-(2f) для этого случая:

$$R_{(2N-1)} = \left\| \begin{array}{cccc} R_0 & R_1 & R_2 & \dots & R_{2N-2} \\ R_1^T & R_0 & R_1 & \dots & R_{2N-3} \\ R_2^T & R_1^T & R_0 & \dots & R_{2N-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{2N-2}^T & R_{2N-3}^T & R_{2N-4}^T & \dots & R_0 \end{array} \right\| ,$$

где

$$R_0 = \left\| \begin{array}{cccc} R_{00} & \frac{R_{00}+R_{01}}{2} & R_{01} & \dots & R_{0,N-1} \\ \frac{R_{00}+R_{01}}{2} & R_{00} & \frac{R_{00}+R_{01}}{2} & \dots & \frac{R_{0,N-1}+R_{0,N-2}}{2} \\ R_{01} & \frac{R_{00}+R_{01}}{2} & R_{00} & \dots & R_{0,N-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{0,N-1} & \frac{R_{0,N-1}+R_{0,N-2}}{2} & \dots & \dots & R_{00} \end{array} \right\| ,$$

$$R_1 = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{R_{00}+R_{10}}{2} & \dots & \frac{R_{0,N-1}+R_{1,N-1}}{2} \\ \frac{R_{00}+2R_{01}+R_{11}}{4} & \dots & \frac{R_{0,N-1}+R_{0,N-2}+R_{1,N-1}+R_{1,N-2}}{4} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{R_{0,N-1}+R_{1,N-1}}{2} & \dots & \frac{R_{00}+R_{10}}{2} \end{array} \right\| ,$$

$$R_2 = \left\| \begin{array}{cccc} R_{10} & \frac{R_{10}+R_{11}}{2} & R_{11} & \dots & R_{1,N-1} \\ \frac{R_{10}+R_{11}}{2} & R_{10} & \frac{R_{10}+R_{11}}{2} & \dots & \frac{R_{1,N-1}+R_{1,N-2}}{2} \\ R_{11} & \frac{R_{10}+R_{11}}{2} & R_{10} & \dots & R_{1,N-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{1,N-1} & \frac{R_{1,N-1}+R_{1,N-2}}{2} & R_{1,N-2} & \dots & R_{10} \end{array} \right\| ,$$

.....

$$R_{2N-2} =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} R_{0,N-1} & \frac{R_{0,N-1}+R_{1,N-1}}{2} & \dots & R_{N-1,N-1} \\ \frac{R_{0,N-1}+R_{1,N-1}}{2} & R_{0,N-1} & \dots & \frac{R_{N-1,N-1}+R_{N-1,N-2}}{2} \\ R_{1,N-1} & \frac{R_{0,N-1}+R_{1,N-1}}{2} & \dots & R_{N-1,N-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{N-1,N-1} & \frac{R_{N-1,N-1}+R_{N-1,N-2}}{2} & \dots & R_{0,N-1} \end{array} \right\| ,$$

Из приведенного примера видно, что условия 1)-4) Утверждения 3.7. для матрицы $R_{(2N-1)}$ выполняются, следовательно, поле $\xi_{i'j'}^{1/2}$ в узлах $(i+k/2, j+l/2)$, $i, j = 0, +1, +2, \dots, N-1$, $k, l = 0, 1$ однородно и изотропно в смысле определения (3.86).

Рассмотрим теперь случай регулярной сетки $\omega_{1/N} = \{(x_0 \pm \frac{1}{2^N}i, x_0 \pm \frac{1}{2^N}j); i, j = 0, 1, \dots; x_0 = 0\}$ после N шагов восполнения методом (1f)-(2f). Вычислим корреляционную функцию поля $\xi_{i'j'}^{1/N}$ на этой сетке. Поскольку поле однородно и изотропно в смысле определения (3.86), будем вычислять корреляции $R_{i+n/2^N, j+m/2^N}$, $m, n = 0, 1, 2, \dots, 2^N$. Для вычисления воспользуемся формулой (3.89)

Получим:

$$\begin{aligned}
 R_{i,j+1/2} &= (R_{i,j} + R_{i,j+1})/2, \\
 R_{i,j+1/4} &= (3R_{i,j} + R_{i,j+1})/4, \\
 R_{i,j+3/4} &= (R_{i,j} + 3R_{i,j+1})/4, \\
 &\dots\dots\dots \\
 R_{i,j+1/2^N} &= ((2^N - 1)R_{i,j} + R_{i,j+1})/2^N, \\
 R_{i,j+m/2^N} &= ((2^N - m)R_{i,j} + mR_{i,j+1})/2^N.
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

Отсюда видно, что по горизонтали в интервале между двумя смежными узлами исходной сетки корреляционная функция линейна и совпадает с корреляциями в этих узлах. На каждом очередном шаге восполнения все корреляции лежат на этой прямой. Аналогичная картина наблюдается и по вертикали. На диагоналях выполняются следующие соотношения

$$\begin{aligned}
 R_{i+1/2, j+1/2} &= (R_{i,j} + R_{i+1, j} + R_{i, j+1} + R_{i+1, j+1})/4, \\
 R_{i+1/4, j+1/4} &= (9R_{i,j} + 6R_{i, j+1} + R_{i+1, j+1})/16, \\
 R_{i+3/4, j+3/4} &= (R_{i,j} + 6R_{i, j+1} + 9R_{i+1, j+1})/16, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{3.92}$$

$$\begin{aligned}
& R_{i+1/2^N, j+1/2^N} = \\
& = ((4^N - 2^{N+1} + 1)R_{i,j} + 2(2^N - 1)R_{i,j+1} + R_{i+1,j+1})/4^N, \\
& R_{i+m/2^N, j+m/2^N} = \\
& = ((4^N - m2^{N+1} + m^2)R_{i,j} + 2(m2^N - m^2)R_{i,j+1} + m^2R_{i+1,j+1})/4^N,
\end{aligned}$$

Видно, что на диагоналях нет линейности. При каждом фиксированном разбиении полученное поле является сеточно-однородным и изотропным в смысле определения (3.86). При измельчении шага сетки все большее число узлов ложится в некоторой заданной окрестности ε окружности, проведенной из фиксированного узла (i, j) через любой другой узел (i', j') исходной сетки. Среди корреляций между значениями поля в узле (i, j) и узлами в окрестности ε равными оказываются только те, которые относятся к узлам, равноудаленным от точки (i, j) в силу алгоритма построения поля, который обеспечивает выполнение соотношения (3.86). В частности, коэффициент корреляции $R_{i,j+m/2^N}$ из (3.91) относится к узлам исходной сетки при $m = 2^N$ с расстоянием между ними, равным шагу сетки ω_1 , а $R_{i+m/2^N, j+m/2^N}$ из (3.92) при $m_0 = \text{round}(2^N/\sqrt{2})$ (где $\text{round}(\cdot)$ - ближайшее целое число) соответствует коэффициенту корреляции между значениями поля в узлах, расстояние между которыми наиболее близко к шагу исходной сетки ω_1 . Так, в частности, при $N = 10$

$$R_{i+m_0/2^N, j+m_0/2^N} = 0.086R_{ij} + 0.41R_{i,j+1} + 0.5R_{i+1,j+1}. \quad (3.93)$$

Рассмотрим, например, исходное однородное изотропное поле ξ_{ij}^0 на сетке ω_1 с заданной корреляционной функцией $R_{mn} = \exp(-\alpha(m^2 + n^2))$. С помощью алгоритма (1f)-(2f) построим поле $\xi_{i'j'}^{1/N}$ при $N = 10$. На Рис. 3 приведены графики зависимости коэффициентов корреляции $R_{i,j+1}$ и $R_{i+m_0/2^N, j+m_0/2^N}$ от α . Видно, что при малых α , т.е. когда R_{mn} достаточно медленно убывает, эти корреляции достаточно близки и в этом смысле сеточное поле $\xi_{i'j'}^{1/N}$ близко к непрерывному

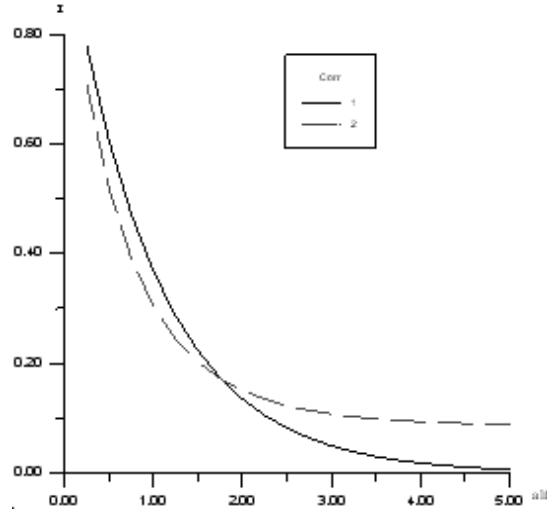


Рис. 3.9: Графики зависимости коэффициентов корреляции $R_{i,j+1}$ - кривая 1 и $R_{i+m_0/2^N, j+m_0/2^N}$ - кривая 2 от α .

однородному и изотропному полю. При больших α эти корреляции существенно отличаются.

Рассмотрим случай произвольной точки сетки $\omega_{1/N}$. Вычислим корреляции $R_{i+n/2^N, j+m/2^N}$.

$$R_{i+n/2^N, j+m/2^N} = \frac{[(4^N - m2^N - n2^N + mn)R_{i,j} + (m2^N + n2^N - 2mn)R_{i,j+1} + mnR_{i+1,j+1}]}{4^N}.$$

Пример. Рассмотрим еще один способ восполнения однородного и изотропного поля в смысле определения (3.86). Пусть, как и раньше ξ_{ij}^0 - однородное и изотропное в смысле определения (3.86) двумерное негауссово поле в узлах сетки $\omega_1 = \{(x_0 \pm i, x_0 \pm j); i, j = 0, 1, \dots; x_0 = 0\}$ с одномерным распределением $F(u)$ и корреляционной функцией $R(|i-k|, |j-l|) = R(m, n) = R_{mn}$. Рассмотрим следующий способ восполнения:

(1g) Для каждого $i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ в узлах $(i + 1/2, j + 1/2)$ значение поля $\xi_{i'j'}^{1/2}$ полагаем равным одному из соседних узлов (i, j) , $(i, j + 1)$, $(i + 1, j)$, $(i + 1, j + 1)$ с вероятностью $1/4$.

(2g) Для каждого $i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ в узлах $(i, j + 1/2)$ значение поля $\xi_{i'j'}^{1/2}$ полагаем равным одному из соседних узлов (i, j) , $(i, j + 1)$, $(i - 1/2, j + 1/2)$, $(i + 1/2, j + 1/2)$ с вероятностью $1/4$, а в узлах $(i + 1/2, j)$ значение поля $\xi_{i'j'}^{1/2}$ полагаем равным одному из соседних узлов (i, j) , $(i + 1, j)$, $(i + 1/2, j - 1/2)$, $(i + 1/2, j + 1/2)$ с вероятностью $1/4$. В узлах $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ значения поля $\xi_{i'j'}^{1/2}$ полагаем равным значениям поля ξ_{ij}^0 в тех же узлах

При этом нужно разыгрывать только две независимые случайные величины, равномерно распределенные на интервале $[0, 1]$: одну для шага (1g), другую для шага (2g).

Утверждение 3.8. Поле $\xi_{i'j'}^{1/2}$, полученное в результате процедуры выполнения (1g)-(2g) является однородным и изотропным в смысле определения (3.86).

Доказательство.

По построению, поле, полученное после шага (1g), совпадает по полученной сетке с полем, построенным в результате процедуры выполнения (1f)-(2f), значит по доказанному утверждению 1.3.2 после шага (1g) поле однородно и изотропно в смысле определения (3.86). А шаг (2g) соответствует шагу (1g) для сетки $\omega_h = \{(x_0 \pm hn, x_0 \pm hm); n, m = 0, 1, \dots; x_0 = 0\}$ с шагом сетки $h = \sqrt{2}/2$, повернутой на угол, равный $\pi/4$, следовательно, опять получаем однородное и изотропное поле в смысле определения (3.86).

Утверждение доказано.

Отметим, что процедура выполнения (1g)-(2g), в отличие от процедуры (1f)-(2f), уже не эквивалентна процедуре выполнения (1d)-(2d) однородного поля с узлов целочисленной сетки по значениям

однородного изотропного в смысле определения (3.86) поля ξ_{ij}^0 с корреляционной функцией R_{mn} в точку области $(i + k/2, j + l/2)$, $i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $k, l = 0, 1$. Корреляционная функция поля, полученного в результате процедуры восполнения (1g)-(2g) имеет более сложную структуру и $R_{i+n/2^N, j+m/2^N}$ зависит уже не от четырех значений: $R_{i,j}, R_{i+1,j}, R_{i,j+1}, R_{i+1,j+1}$, как при процедуре восполнения (1f)-(2f), а от шестнадцати $R_{a,b}$: $a = i-1, i, i+1, i+2$, $b = j-1, j, j+1, j+2$.

Таким образом, в данном пункте предложены и исследованы некоторые возможные способы стохастического восполнения однородных и изотропных в смысле определения (3.86) негауссовых полей, заданных на регулярной сетке с шагом $h = 1$, на регулярную сетку с шагом $1/2^N$, $N \geq 1$ с сохранением свойств однородности и изотропности в смысле определения (3.86).

Упражнения

1. Пусть $\vec{\xi}_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T = (\vec{\xi}^{(1)T}, \vec{\xi}^{(2)T})^T$ распределен $N(\mu_n, R_n)$ -нормальный вектор с $M\vec{\xi}_n = \vec{\mu}_n = (\vec{\mu}^{(1)T}, \vec{\mu}^{(2)T})^T$ и

$$R_n = M(\vec{\xi}_n - \vec{\mu}_n)(\vec{\xi}_n - \vec{\mu}_n)^T = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}$$

а) Показать, что если $R_{12} = R_{21} = 0$, то $\vec{\xi}^{(1)}$ распределен $N(\mu^{(1)}, R_{11})$, а $\vec{\xi}^{(2)} - N(\mu^{(2)}, R_{22})$.

б) Доказать, что если $R_{12} \neq 0$, $R_{21} \neq 0$, то любой подвектор вектора $\vec{\xi}_n$ распределен нормально с параметрами, определяемыми вектором $\vec{\mu}_n$ и ковариационной матрицей R_n .

2. В условиях упражнения 1. получить выражения для блоков ковариационной матрицы вектора $\vec{\eta}_n = C\vec{\xi}_n$, где

$$C = \begin{vmatrix} I & R_{12}R_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{vmatrix}.$$

3. Пусть C - невырожденная квадратная матрица. Показать, что если $\vec{\xi}_n$ распределен $N(\vec{\mu}_n, R_n)$, то вектор $\vec{\eta}_n = C\vec{\xi}_n$ распределен $N(C\vec{\mu}, CR_nC^T)$.

4. Пусть $\vec{\xi}_n$ распределен $N(\vec{\mu}_n, R_n)$. Показать, что вектор $\vec{\xi}_n + \vec{b}$ распределен $N(\vec{\mu}_n + \vec{b}, R_n)$, где \vec{b} - произвольный вектор.

5. Показать, что $R_n = M(\vec{\xi}_n - \vec{\mu}_n)(\vec{\xi}_n - \vec{\mu}_n)^T$ - положительно определенная матрица.

6. Пусть C - прямоугольная матрица размера $p \times n$. Показать, что если $\vec{\xi}_n$ распределен $N(\vec{\mu}_n, R_n)$, то вектор $\vec{\eta}_n = C\vec{\xi}_n$ распределен $N(C\vec{\mu}, CR_nC^T)$.

7. В условиях упражнения 1. получить выражения для условной нормальной плотности вектора $\vec{\xi}^{(1)}$ при условии, что $\vec{\xi}^{(2)} = \vec{x}^{(2)}$.

8. Получить выражение для двумерной условной нормальной плотности.

9. Используя (1.11) получить соотношения (1.12) для моделирования гауссовского вектора $\vec{\xi}_{(n)} = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ с нулевым средним и ковариационной матрицей R_n вида (1.1).

10. Получить соотношения (1.15).

11. Пусть R - блочная квадратная матрица вида

$$R = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}.$$

где R_{11} и R_{22} - квадратные матрицы (могут быть разных размеров), причем R_{11} - не вырождена. Показать, что

$$\det(R) = \det(R_{11}) \det(R_{22} - R_{21}R_{11}^{-1}R_{12}).$$

12. Показать, что в (1.15) величины $d_k^2 > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

13. Доказать равенство $(B^{-1})^T = (B^T)^{-1}$.

14. Вывести формулы для вычисления элементов матрицы T_n в разложении $R_n^{-1} = T_n^T T_n$ (1.20), если элементы матрицы R_n^{-1} известны.

15. Получить выражение для блочной матрицы, обратной к матрице

$$R_{k+1} = \begin{vmatrix} R_k & J_k \vec{r}_k \\ \vec{r}_k^T J_k & 1 \end{vmatrix}.$$

16. Получить соотношения (1.25) для системы уравнений

$$R_{k+1} \vec{b}[k+1] = \vec{r}_{k+1}.$$

17. Используя соотношения (1.25) доказать тождество

$$d_k^2 = (1 - b_k^2[k])d_{k-1}^2.$$

18. Доказать тождество $\det(I - \vec{x}\vec{y}^T) = 1 - \vec{y}^T \vec{x}$.

19. Доказать тождество $(I - \vec{x}\vec{y}^T)^{-1} = I + \frac{\vec{x}\vec{y}^T}{1 - \vec{y}^T \vec{x}}$.

20. Используя тождество из упражнения 18 и соотношения

$$\begin{aligned} V_k &= I_k - J_k \vec{b}[k] \vec{r}_k^T / r_{k+1}, & W_k &= I_k - \vec{b}[k] \vec{r}_k^T, \\ \tilde{V}_k &= I_k - J_k \vec{\beta}[k] \vec{g}_k^T / g_{k+1}, & \tilde{W}_k &= I_k - \vec{b}[k] \vec{g}_k^T, \end{aligned}$$

в предположении $r_{k+1} \neq 0$ с помощью (1.25) получить соотношение

$$b_{k+1}[k+1] = \frac{\beta_{k+1}[k+1]}{1 - \varepsilon} \frac{\det(V_k \tilde{V}_k^{-1})}{\det(W_k \tilde{W}_k^{-1})}.$$

21. Используя соотношения (1.25), (1.30) и тождества из упражнений 18, 19, 20, доказать тождество

$$b_{k+1}[k+1] = \frac{\beta_{k+1}[k+1]/(1 - \varepsilon) + \vec{r}_k^T J_k (\vec{\beta}[k] - \vec{b}[k]) / \delta_k^2}{\vec{r}_k^T [(1 - \varepsilon) \vec{\beta}[k] - \vec{b}[k]] / \delta_k^2 + 1}.$$

22. Доказать тождество

$$\begin{aligned} & \det(\Phi_m - \lambda I_m) = \\ & = \det \left(\begin{vmatrix} b_1 - \lambda & b_2 & \dots & b_{m-1} & b_m \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \right) \\ & = \lambda^m - b_1 \lambda^{m-1} - \dots - b_m \end{aligned}$$

23. Доказать тождество

$$R_m - \Phi_m R_m \Phi_m^T = \begin{vmatrix} d^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

$$d^2 = 1 - r_m^T \vec{b}[m]$$

24. Найти решение разностного уравнения

$$\rho_h = b_1 \rho_{h-1} + b_2 \rho_{h-2} + \dots + b_m \rho_{h-m}, \quad h = 1, 2, \dots$$

для случая, когда корни уравнения

$$\lambda^m = b_1 \lambda^{m-1} + \dots + b_m$$

вещественны и различны.

25. Получить соотношения (2.3).

26. Получить соотношения (2.8).

27. Получить соотношения (2.9).

28. Получить соотношения (2.11).

29. Показать, что для матрицы

$$B_k^* = \left\| \begin{array}{cc} 0 & B_k[k] \\ \tilde{B}_k[k] & 0 \end{array} \right\|$$

выполняется неравенство $|\lambda(B_k^*)| < 1$.

30. Доказать тождество (2.3.4)

$$\det(\Phi_{(m)} - \lambda I_{(m)}) = \det(I_p \lambda^m - B_1^T[m] \lambda^{m-1} - \dots - B_m^T[m])$$

31. Выписать ограничения на корреляционную функцию процесса скользящего среднего второго порядка

$$\eta_t = a_0 \phi_t + a_1 \phi_{t-1} + a_2 \phi_{t-2}.$$

32. Показать, что для процесса скользящего среднего вида

$$\eta_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \phi_{t-k}$$

спектральная плотность имеет вид

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega} \right|^2$$

33. Получить соотношения (3.14).
34. Доказать тождества (3.16), (3.17).
35. Получить соотношения (3.18).
36. Получить соотношения (3.19), (3.20).
37. Получить соотношения (3.23).
38. Получить автоковариационную функцию процесса (3.30) при $n = 1$.
39. Получить автоковариационную и взаимную ковариационную функцию процессов (3.30) при $n = 2$.
40. Для процесса (3.37) получить выражения для автоковариационной и взаимной ковариационной функций.
41. Пусть на оси t в точках $t_i : t_i = i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ задана стационарная в широком смысле случайная последовательность $\xi(i) = \xi_i$ с одномерным распределением $F(x)$ и корреляционной функцией $R(|i - j|) = R_m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $R_0 = 1$.

Получить выражения для средних и дисперсий процесса $\xi(t)$, определенного следующим образом:

(1а) Независимо от ξ_i моделируется случайная величина α , распределенная в интервале $[0, 1]$ с произвольной функцией распределения $G(x)$, и для каждого $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ на оси t выбирается точка $i + \alpha$.

(2а) В интервале $(i - 1 + \alpha, i + \alpha]$ принимается $\xi(t) \equiv \xi_{i+E(\alpha)}$, где $E(\alpha)$ - целая часть действительного числа α .

42. Получить выражение для автоковариационной функции процесса $\xi(t)$ из упражнения 41, показать, что этот процесс является периодически коррелированным.

43. Пусть на оси t в точках $t_i : t_i = i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ задана периодически коррелированная случайная последовательность $\xi(i) = \xi_i$ с одномерным распределением $F(x)$ и корреляционной функцией $R(|i - j|) = R_{m,i}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $R_0 = 1$, $R_{m,i} = R_{m,i+p}$, где p - период.

Показать, что процесс (1а)-(2а), определенный в упражнении 41, где случайная величина α равномерно распределена в интервале $[0, 1]$, является периодически коррелированным процессом с периодом p .

Литература

- [1] Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ // М: Гос. Издат. Физико-математической литературы, 1963. - 500 с.
- [2] Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов.- М.: Мир, 1976.- 757 с.
- [3] Боков В.Н., Лопатухин Л.И., Микулинская С.М., Рожков В.А., Румянцева С.А. О межгодовой изменчивости волнения //Проблемы исследования и математического моделирования ветрового волнения. - Санкт-Петербург: Гирометеоиздат, 1995. -С. 446-454.
- [4] Бокс Дж., Дженкинс Т. Анализ временных рядов (пер. с англ.). - Прогноз и управление. -М.: Мир, 1974, 308 с.
- [5] Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и её инженерные приложения.// М.: Наука, 1991.-383 с.
- [6] Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. - М.: Наука, 1987. - 320 с.
- [7] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления // - М: Наука, 1984. - 320 с.

- [8] Л.С. Гандин, Р.Л. Каган Статистические методы интерпретации метеорологических данных.- Л.: Гидрометеиздат,1976, 359 с.
- [9] Gubina N.I., Ogorodnikov V.A. Some problems of the statistical simulation of conditional processes and fields // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, Vol. 13, No. 5, pp. 345-358 (1998).
- [10] Gubina N.I., Ogorodnikov V.A. Stochastic filling of homogeneous isotropic random fields // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, Vol. 21, No. 6, pp. 514-524 (2006).
- [11] K.V. Derenok, V.A. Ogorodnikov Numerical modeling of strong and durational reduction of air temperature // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, Utrecht: VSP. The Netherlands, - 2008, Vol. 23, No. 3, Pp. 223-237.
- [12] Доценко С.В. Случайные процессы в гидрофизических измерениях. – Л.: Гидрометеиздат, 1983. - 239 с.
- [13] Драган Я.П., Рожков В.А., Яворский И.Н. Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов.- Л.: Гидрометеиздат, 1987. -320 с.
- [14] Durbin J. The fitting of time - series models.- Rev.Inst.Internat.Statist., 1960, No. 28, p. 233-244.
- [15] Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. - М.: Наука, 1982.
- [16] Epstein E.S Stochastic dynamic prediction.- Tellus, 1969, v. 21, No. 6, p. 739-759.
- [17] A.I. Evstafieva, E.I.Khlebnikova, V.A. Ogorodnikov Numerical stochastic models for complexes of time series of weather elements // Russ. Journal of Numer Anal. and Math. Modelling, Vol. 20, No. 6, (2005), pp. 535-548.

- [18] Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. - М: Мир, 1990. - 584 с.
- [19] Марченко А.С. Об оптимальности объективного анализа с точки зрения точности прогнозов // Известия АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1966, т.11, N8.-С.891- 892.
- [20] Марченко А.С., Огородников В.А. Моделирование стационарных гауссовских последовательностей большой длины с произвольной корреляционной функцией // Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1984. -Т. 24, No. 10. -С. 1514-1519.
- [21] Марченко А.С., Минакова Л.А. Вероятностная модель временных рядов температуры воздуха //Ж. Метеорология и гидрология, 1982, №3, стр. 51-56.
- [22] Марченко А.С., Огородников В.А. Авторегрессионные процессы с заданной корреляционной структурой. //Известия вузов, Математика, 1985, No. 7. -С. 63-67.
- [23] Марченко А.С., Семочкин А.Г. F F - метод моделирования временных рядов по наблюдаемым реализациям. // Численные методы статистического моделирования. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1987.- С.14-22.
- [24] Михайлов Г.А. Моделирование случайных процессов и полей на основе точечных потоков Пальма.- Докл. АН СССР, 1982, т. 3, N 3. -С. 531-535.
- [25] Михайлов Г. А., Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. – М.: Изд. Академия, 2006. -367 с.
- [26] Огородников В.А. О динамико-вероятностном прогнозе. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, т. 11, No 8, 1975. -С. 851-853.

- [27] Огородников В.А., Пригарин С.М. Основы численного моделирования случайных процессов и полей. Выпуск 1. Схемы авторегрессии и скользящего среднего. Методические указания к курсу "Моделирование случайных процессов и полей". НГУ, Новосибирск, 1995., 68 с.
- [28] V.A.Ogorodnikov and S.M.Prigarin Numerical Modelling of Random Processes and Fields: Algorithms and Applications. - VSP, Utrecht, the Netherlands, 1996, 240p.
- [29] V. A. Ogorodnikov, E. I. Khlebnikova, S. S. Kosyak Numerical stochastic simulation of joint nongaussian meteorological time series \ \ Russ J.Numer.Math.Modeling. (2009), 24. P. 467-480.
- [30] V.A.Ogorodnikov and A.V.Protasov Dynamic probabilistic model of atmospheric processes and the variational methods of data assimilation// Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling (1997), Vol.12, No.5, pp. 461-479.
- [31] Пиранашвили З.А. Некоторые вопросы статистико-вероятностного моделирования случайных процессов // Вопросы исследования операций.- Тбилиси, 1966.- С. 53-91.
- [32] Пригарин С.М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей.- Новосибирск, 2005. 258 с.
- [33] Robinson T.A. Multichannel time series analysis and digital computer programs.- S.F.: Holden DAY, 1967.
- [34] Рожков В.А., Трапезников Ю.А. Вероятностные модели океанологических процессов. - Л.: Гидрометеиздат, 1990. -272 с.
- [35] В.И. Романовский Дискретные цепи Маркова, Гостехиздат 1949.
- [36] С.М. Рытов С.М. Рытов. Введение в статистическую радиофизику. Часть 1. Случайные процессы. – М.: Наука, 1976, 494 с.

- [37] Л.Я. Савельев Длинные серии в марковских последовательностях // *Ghtltkmyst ntjhtvs ntjhbb dthjznyjentq/* - 1985. - №5. - С 137-144.
- [38] Сванидзе Г.Г. Математическое моделирование гидрологических рядов. - Л.: Гидрометеоиздат, 1977, - 296 с.
- [39] Смирнов И.В., Большев Л.Н. Таблицы для вычисления функции двумерного нормального распределения // - М: Изд. АН СССР, 1962. - 204 с.
- [40] Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло // - М.: Наука, 1973.- 311 с.
- [41] Татарский В.И. Использование динамических уравнений при вероятностном прогнозе барического поля. - Известия АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1969, т. 5, № 3. -С. 293-297.
- [42] Товстик Т.М. Моделирование однородного гауссовского поля // Тр X Всесоюз. симпозиума. Секция 4. Методы представления и аппаратный анализ случайных процессов и полей. - Л. 1978. - С. 75-77.
- [43] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.-Л., Физматгиз, 1963, 734 с.
- [44] В.Феллер Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М: Мир, 752.с.